210 problemas resueltos de Física y Química de 1.º de Bachillerato

versión 1.2 — 28 de marzo de 2021
https://bitbucket.org/llantones/apuntesfq/src/master/
luis.munoz.edu arroba juntadeandalucia.es

TEORÍA ATÓMICO-MOLECULAR

1. Cambia de unidades: *a*) 33 MN a N. *b*) 100 km/h a m/s. *c*) 42 nPa a kPa. *d*) 350 L/s a m^3/s. *e*) 33 g/cm^3 a kg/m^3. *f*) 33 kg/m^3 a kg/L.

2. El hidrógeno y el oxígeno se combinan en una proporción 1:8 para formar agua. Indica lo que ocurrirá si combinamos 14 g de hidrógeno con 50 g de oxígeno.

   Solución. En este ejercicio se está aplicando la ley de las proporciones definidas de Proust, por tanto suponemos que la proporción se refiere en masa, no en número de átomos, que además en aquella época no estaba clara su existencia. Podéis hacerlo con reglas de tres pero con factores de conversión queda muy compacto y claro:

$$14 \text{ g de hidrógeno} \cdot \frac{8 \text{ g de ox}\acute{\imath}\text{geno}}{1 \text{ g de hidrógeno}} = 112 \text{ g de ox}\acute{\imath}\text{geno},$$

   esto no puede ocurrir puesto que solo tenemos 50 g de oxígeno.

$$50 \text{ g de ox}\acute{\imath}\text{geno} \cdot \frac{1 \text{ g de hidrógeno}}{8 \text{ g de ox}\acute{\imath}\text{geno}} = 6,25 \text{ g de hidrógeno},$$

   por tanto se gasta todo el oxígeno y nos sobran $14 - 6,25 = 7,75$ g de hidrógeno.

3. El carbono se combina con oxígeno en dos proporciones en masa, 3:4 y 3:8. Con la primera forma monóxido de carbono, y con la segunda, dióxido de carbono. Razona cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas: *a*) 12 g de carbono reaccionan con 48 g de oxígeno para formar CO. *b*) 12 g de carbono reaccionan con 16 g de oxígeno para formar CO. *c*) 12 g de carbono reaccionan con 32 g de oxígeno para formar CO_2. *d*) 12 g de carbono reaccionan con 36 g de oxígeno para formar CO_2.

   Solución. En este ejercicio se aplica la ley de las proporciones múltiples. Veamos las cantidades correctas, para el monóxido de carbono:

$$12 \text{ g de carbono} \cdot \frac{4 \text{ g de ox}\acute{\imath}\text{geno}}{3 \text{ g de carbono}} = 16 \text{ g de ox}\acute{\imath}\text{geno}$$

   y para el dióxido de carbono:

$$12 \text{ g de carbono} \cdot \frac{8 \text{ g de ox}\acute{\imath}\text{geno}}{3 \text{ g de carbono}} = 32 \text{ g de ox}\acute{\imath}\text{geno}$$

   Por tanto son correctos los apartados *b*) y *c*).

4. Se analizaron dos muestras con estas composiciones. Muestra A: 39,563 g de Sn y 5,333 g de O. Muestra B: 29,673 g de Sn y 4,000 g de O. Indica si se trata del mismo o de distintos compuestos.

   Solución. Ley de las proporciones definidas. Si están en la misma proporción serán el mismo compuesto:

$$\frac{39,563}{5,333} = 7,4185$$
$$\frac{29,673}{4,000} = 7,4182$$

5. El estaño puede formar con el oxígeno dos tipos de óxidos: en el óxido A, la proporción en masa entre el estaño y el oxígeno es 7,42:1 y en óxido B, 3,71:1. *a*) ¿Se cumple la ley de las proporciones múltiples? *b*) Si el óxido A se compone de un átomo de Sn y otro de O, indica la composición del óxido B.

   Solución. *a*) Tenemos una cantidad fija de oxígeno y cantidades diferente de estaño, tenemos que comprobar que dichas cantidades están en relación de números enteros sencillos:

$$\frac{7,42}{3,71} = 2,$$

   por lo tanto se cumple la ley.

   b) Como el óxido B tiene la mitad de masa de estaño que el A, significa que tiene la mitad de átomos ($Sn_{\frac{1}{2}}O$) y multiplicando por dos para que sean átomos enteros obtenemos la fórmula del óxido B: SnO_2, y comprobamos el resultado de nuestros conocimientos de formulación.

6. Cuando 1 L de nitrógeno reacciona con 3 L de hidrógeno, se obtiene el siguiente volumen de amoniaco: *a*) 1 L,*b*) 2 L, *c*) 4 L, *d*) 3,15 L.

   Solución. Todos los gases se encuentran a la misma temperatura y presión puesto que se juntan para reaccionar. Debido a la hipótesis de Avogadro hablar de litros es igual que hablar de partículas, por lo que ajustando la reacción:

$$N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3,$$

   observamos que el apartado correcto es el *b*).

7. Calcula la masa en gramos de un átomo de carbono-12.

   Solución. Un átomo de carbono-12 tiene una masa atómica de 12 u. Sabemos que la masa molar es numéricamente igual que la masa atómica pero expresada en gramos, o sea que un mol de átomos de carbono-12 tienen una masa de 12 g. Podemos escribir por tanto:

$$12\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} = \frac{12 \text{ g de carbono}}{1 \text{ mol de átomos de carbono}} \cdot \frac{1 \text{ mol de átomos de carbono}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ átomos de carbono}} =$$

$$= 1,99 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{g}}{\text{átomo de carbono}}$$

8. ¿Cuántas moléculas de ácido sulfúrico hay en 200 g de ácido sulfúrico? ¿Y cuántos átomos de H, S y O?

Solución. La masa molar del ácido sulfúrico (H_2SO_4) es:

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 32 + 4 \cdot 16 = 98\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

$$200 \text{ g ác. sulf.} \cdot \frac{1 \text{ mol ác. sulf.}}{98 \text{ g ác. sulf.}} \cdot \frac{\mathrm{N_A} \text{ moléc. ác. sulf.}}{1 \text{ mol ác. sulf.}} = 1,23 \cdot 10^{24} \text{ moléc. ác. sulf.}$$

$$1,23 \cdot 10^{24} \text{ moléc. ác. sulf.} \cdot \frac{2 \text{ át. de hidróg.}}{1 \text{ moléc. ác. sulf.}} = 2,45 \cdot 10^{24} \text{ át. de hidróg.}$$

$$1,23 \cdot 10^{24} \text{ moléc. ác. sulf.} \cdot \frac{1 \text{ át. de azufr.}}{1 \text{ moléc. ác. sulf.}} = 1,23 \cdot 10^{24} \text{ át. de azufr.}$$

$$1,23 \cdot 10^{24} \text{ moléc. ác. sulf.} \cdot \frac{4 \text{ át. de ox.}}{1 \text{ moléc. ác. sulf.}} = 4,91 \cdot 10^{24} \text{ át. de ox.}$$

9. Una muestra de glucosa ($C_6H_{12}O_6$) tiene una masa de 18 g. Calcula, *a*) la cantidad, en mol, de $C_6H_{12}O_6$, de C, de H y de O. *b*) El número de partículas de $C_6H_{12}O_6$, de C, de H y de O.

Solución. La masa molar de la glucosa es:

$$6 \cdot 12 + 12 \cdot 1 + 6 \cdot 16 = 180\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

$$18 \text{ g glucosa} \cdot \frac{1 \text{ mol moléc.glucosa}}{180 \text{ g glucosa}} = 0,1 \text{ mol moléc. glucosa}$$

Sabemos que en una molécula de glucosa hay 6 carbonos, 12 hidrógenos y 6 oxígenos y por eso en 0,1 mol de moléculas de glucosa habrá 0,6 mol de átomos de carbono. Escribiéndolo en un factor de conversión y con cuidado para que todas las unidades estén correctamente escritas:

$$0,1 \text{ mol moléc. glucosa} \cdot \frac{6 \text{ mol át. carb.}}{1 \text{ mol moléc. glucosa}} = 0,6 \text{ mol át. carb.}$$

$$0,1 \text{ mol moléc. glucosa} \cdot \frac{12 \text{ mol át. hidr.}}{1 \text{ mol moléc. glucosa}} = 1,2 \text{ mol át. hidr.}$$

$$0,1 \text{ mol moléc. glucosa} \cdot \frac{6 \text{ mol át. ox.}}{1 \text{ mol moléc. glucosa}} = 0,6 \text{ mol át. ox.}$$

b) Al hablar de partículas pueden ser moléculas o átomos.

$$0,1 \text{ mol moléc. glucosa} \cdot \frac{\mathrm{N_A} \text{ moléc. gluc.}}{1 \text{ mol moléc. glucosa}} = 6,022 \cdot 10^{22} \text{ moléc. gluc.}$$

$$0,6 \text{ mol át. carb.} \cdot \frac{\mathrm{N_A} \text{ át. carb.}}{1 \text{ mol át. carb.}} = 3,6 \cdot 10^{23} \text{ át. carb.}$$

$$1,2 \text{ mol át. hidr.} \cdot \frac{\mathrm{N_A} \text{ át. hidr.}}{1 \text{ mol át. hidr.}} = 7,2 \cdot 10^{23} \text{ át. hidrox.}$$

$$0,6 \text{ mol át. ox.} \cdot \frac{\mathrm{N_A} \text{ át. ox.}}{1 \text{ mol át. ox.}} = 3,6 \cdot 10^{23} \text{ át. ox.}$$

10. ¿Qué se quiere decir al afirmar que ¡¡la masa atómica del azufre es 32,06¿¿?

    Solución. Que tiene 32,06 veces más masa que la unidad de masa atómica y de manera aproximada quiere decir que tiene 32 veces más masa que el átomo de hidrógeno.

11. ¿Cuál de las siguientes muestras contiene mayor número de átomos: *a*) 10 g de Na, *b*) 10 g de CO_2 o *c*) 2 mol de amoniaco?

    Solución. Pasamos todos los datos a átomos.

$$10 \text{ g sodio } \cdot \frac{1 \text{ mol át. sodio}}{23 \text{ g sodio}} \cdot \frac{\mathrm{N_A} \text{ át. sodio}}{1 \text{ mol át. sodio}} = 2,61 \cdot 10^{23} \text{ át. sodio}$$

$$10 \text{ g } \mathrm{CO_2} \cdot \frac{1 \text{ mol moléc. } \mathrm{CO_2}}{44 \text{ g } \mathrm{CO_2}} \cdot \frac{\mathrm{N_A} \text{ moléc. } \mathrm{CO_2}}{1 \text{ mol moléc. } \mathrm{CO_2}} \cdot \frac{3 \text{ át.}}{1 \text{ moléc. } \mathrm{CO_2}} = 4,1 \cdot 10^{23} \text{ át.}$$

$$2 \text{ mol amon. } \cdot \frac{\mathrm{N_A} \text{ moléc. amon.}}{1 \text{ mol moléc. amon.}} \cdot \frac{4 \text{ át.}}{1 \text{ moléc. amon.}} = 4,8 \cdot 10^{24} \text{ át.}$$

    El apartado *c*) tiene mayor número de átomos.

12. Un átomo de determinado elemento tiene una masa de $3,819 \cdot 10^{-23}$ g, ¿cuánto vale su masa atómica?

    Solución. Multiplicando la masa de un átomo, expresada en gramos, por el número de Avogadro obtendremos la masa de un mol y sabemos que coincide numéricamente con la masa atómica (expresada en u). En forma de factor de conversión:

$$\frac{3,819 \cdot 10^{-23} \text{ g}}{1 \text{ át.}} \cdot \frac{\mathrm{N_A} \text{ át.}}{1 \text{ mol át.}} = 22,9 \ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

    y comprobamos en el sistema periódico que se trata del sodio.

13. Indica cuántos moles de agua son: *a*) 3,42 g de agua, *b*) 10 cm^3 de H_2O y *c*) $1,82 \cdot 10^{23}$ moléculas de agua.

    Solución. Para el apartado *b*) sabemos que la densidad del agua es de 1 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

$$3,42 \text{ g agua } \cdot \frac{1 \text{ mol moléc. agua}}{18 \text{ g agua}} = 0,19 \text{ mol moléc. agua}$$

$$10 \text{ cm}^3 \text{ agua } \cdot \frac{1 \text{ g agua}}{1 \text{ cm}^3 \text{ agua}} \cdot \frac{1 \text{ mol moléc. agua}}{18 \text{ g agua}} = 0,55 \text{ mol moléc. agua}$$

$$1,82 \cdot 10^{23} \text{ moléc. agua } \cdot \frac{1 \text{ mol moléc. agua}}{\text{N}_\text{A} \text{ moléc. agua}} = 0,30 \text{ mol moléc. agua}$$

14. ¿Dónde hay mayor número de moléculas, en 30 g de SO_2 o en 25 g de CO_2?

    Solución. En este ejercicio vamos a ser menos explícitos en los factores de conversión para abreviar un poco.

$$25 \text{ g CO}_2 \cdot \frac{1 \text{ mol CO}_2}{44 \text{ g CO}_2} \cdot \frac{\text{N}_\text{A} \text{ moléc.}}{1 \text{ mol}} = 3,42 \cdot 10^{23} \text{ moléc. CO}_2$$

    Hay mayor número de moléculas en 25 g de dióxido de carbono. A priori podríamos pensar que hay más moléculas en la muestra que tiene más masa pero observamos que no lo podemos saber así, hay que pasar los datos siempre a moles o moléculas.

15. Calcula las moléculas que hay en una gota de agua (se sabe que 20 gotas de agua ocupan un volumen de 1 cm^3).

    Solución.

$$1 \text{ gota} \cdot \frac{1 \text{ cm}^3}{20 \text{ gotas}} \cdot \frac{1 \text{ g agua}}{1 \text{ cm}^3 \text{ agua}} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{18 \text{ g}} \cdot \frac{\text{N}_\text{A} \text{ moléc.}}{1 \text{ mol}} = 1,61 \cdot 10^{21} \text{ moléculas}$$

16. En una muestras fósforo hay 10^{24} átomos. *a*) Calcula la cantidad, en mol, de átomos de fósforo que hay en la muestra. *b*) Calcula la cantidad, en mol, de moléculas de fósforo que hay en la muestra, si se sabe que la molécula de fósforo es P_4.

    Solución. En este ejercicio mejor ser explícito en los factores para no equivocarse:

$$10^{24} \text{ át. P } \cdot \frac{1 \text{ mol át. P}}{\text{N}_\text{A} \text{ át. P}} = 1,6 \text{ mol át. P}$$

    Si una molécula de P_4 tiene 4 átomos de fósforo, también se cumple que 1 mol de moléculas de P_4 tiene 4 moles de átomos de fósforo:

$$1,6 \text{ mol át. P} \cdot \frac{1 \text{ mol moléc.P}_4}{4 \text{ mol át. P}} = 0,41 \text{ mol moléc.P}_4$$

17. ¿Cuántas moléculas hay en 10 g oxígeno? ¿Y cuántos átomos?

    Solución.

$$10 \text{ g O}_2 \cdot \frac{1 \text{ mol}}{32 \text{ g}} \cdot \frac{\text{N}_\text{A} \text{ moléc.}}{1 \text{ mol}} = 1,8 \cdot 10^{23} \text{ moléc. O}_2$$

$$10 \text{ g O}_2 \cdot \frac{1 \text{ mol}}{32 \text{ g}} \cdot \frac{\text{N}_\text{A} \text{ moléc.}}{1 \text{ mol}} \cdot \frac{2 \text{ át. O}}{1 \text{ moléc.O}_2} = 3,6 \cdot 10^{23} \text{ át. O}$$

18. Calcula: *a*) ¿Cuántos moles de átomos de oxígeno hay en 200 g de nitrato de bario, $Ba(NO_3)_2$? *b*) Cuántos átomos de fósforo hay en 0,15 mol de pentóxido de difósforo (P_2O_5)? *c*) Cuántos gramos de oxígeno hay en 0,15 mol de trióxido de difósforo (P_2O_3)? *d*) ¿Cuántos átomos de oxígeno hay en 5,22 g de nitrato de bario?

    Solución. Razonamos igual que en el ejercicio 16, si en una molécula de nitrato de bario hay 6 átomos de oxígeno, en 1 mol de moléculas de nitrato de bario habrá 6 moles de átomos de oxígeno:

$$200 \text{ g nitrato } \cdot \frac{1 \text{ mol nitrato}}{261 \text{ g nitrato}} \cdot \frac{6 \text{ mol át. O}}{1 \text{ mol nitrato}} = 4,6 \cdot 10^{23} \text{ mol át. O}$$

$$0,15 \text{ mol } P_2O_5 \cdot \frac{N_A \text{ moléc.}}{1 \text{ mol}} \cdot \frac{2 \text{ át.P}}{1 \text{ moléc. } P_2O_5} = 1,8 \cdot 10^{23} \text{ át. P}$$

$$0,15 \text{ mol } P_2O_3 \cdot \frac{48 \text{ g O}}{1 \text{ moléc. } P_2O_3} = 7,2 \text{ g O}$$

$$5,22 \text{ g nitrato } \cdot \frac{1 \text{ mol}}{261 \text{ g}} \cdot \frac{N_A \text{ moléc.}}{1 \text{ mol}} \cdot \frac{6 \text{ át. O}}{1 \text{ moléc. nitrato}} = 7,2 \cdot 10^{22} \text{ át. O}$$

19. Tenemos 25 kg de un abono nitrogenado de una riqueza en nitrato de potasio (KNO_3) del 60 %. Calcula la cantidad, en kilogramos, de nitrógeno, que contiene el abono.

20. Calcula la composición centesimal del sulfato de aluminio, $Al_2(SO_4)_3$.

21. El análisis de un compuesto de carbono dio los siguientes porcentajes: 30,45 % de carbono, 3,83 % de hidrógeno, 45,69 % de cloro y 20,23 % de oxígeno. Se sabe que la masa molar del compuesto es 157 g/mol. ¿Cuál es la fórmula molecular del compuesto de carbono?

TEORÍA CINÉTICA

1. ¿Cuánto calor absorbe el alcohol etílico cuando pasa de -150 ºC a 83 ºC?
   $C_\mathrm{f} = 108680$ J/kg, $C_\mathrm{v} = 852720$ J/kg, $C_\mathrm{p} = 2400$ J/(kg K), $T_\mathrm{f} = -117$ º C y $T_\mathrm{v} = 78$ ºC

   Solución: El etanol pasa por los estados descritos en la figura 1. Todos los calores serán positivos puesto que absorbe calor. Como no se indica la masa lo calculamos para 1 kg:

$$\begin{aligned}
q_1 &= mc_\mathrm{p}\Delta T = 1 \cdot 2400 \cdot [-117 - (-150)] = 79200 \text{ J} \\
q_2 &= mL_\mathrm{f} = 1 \cdot 1088600 = 1088600 \text{ J} \\
q_3 &= mc_\mathrm{p}\Delta T = 1 \cdot 2400 \cdot (78 + 117) = 79200 \text{ J} \\
q_4 &= mL_\mathrm{v} = 1 \cdot 852720 = 852720 \text{ J} \\
q_5 &= mc_\mathrm{p}\Delta T = 1 \cdot 2400 \cdot (83 - 78) = 79200 \text{ J} \\
q_\mathrm{total} &= q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 1520600 \text{ J}
\end{aligned}$$

$$\square \underset{q_1}{\Rightarrow} \square \underset{q_2}{\Rightarrow} \square \underset{q_3}{\Rightarrow} \square \underset{q_4}{\Rightarrow} \square \underset{q_5}{\Rightarrow} \square$$

$$-150\,^\circ\mathrm{C} \qquad -117\,^\circ\mathrm{C} \qquad -117\,^\circ\mathrm{C} \qquad 78\,^\circ\mathrm{C} \qquad 78\,^\circ\mathrm{C} \qquad 83\,^\circ\mathrm{C}$$

Figura 1: Calor absorbido por el etanol

2. Si utilizáramos agua en lugar de mercurio, ¿qué altura mínima debería tener el tubo del expermiento de Torricelli para soportar la presión normal de 1 atm?

   Solución. La presión atmosférica equilibra la presión ejercida por la columna de agua:

$$P = d \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{P}{d \cdot g} \Rightarrow h = \frac{101325}{1000 \cdot 9,8} \Rightarrow h = 10,33 \text{ m}$$

   donde hemos escrito todos los datos en el SI: $P = 101325$ Pa y $d_{\text{agua}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

3. Calcula el valor de la presión atmosférica en Pa en un día en el que el barómetro indica una altura de mercurio de 700 mmHg.

   Solución. Cambiamos de unidades:

$$700 \text{ mmHg} \cdot \frac{101325 \text{ Pa}}{760 \text{ mmHg}} = 93325,7 \text{ Pa}$$

4. Expresa la presión atmosférica normal en milibares.

   Solución. Cambiamos de unidades:

$$101325 \text{ Pa} \cdot \frac{1 \text{ bar}}{10^5 \text{ Pa}} \cdot \frac{1000 \text{ mbar}}{1 \text{ bar}} = 1013,25 \text{ bar}$$

5. Cierto gas ocupa 320 cm^3 a 1028 mbar de presión. ¿Qué volumen tendrá a una presión de 1,7 atm?

   Solución. Primero cambiamos de unidades para no mezclarlas:

$$1028 \text{ mbar} \cdot \frac{10^{-3} \text{ bar}}{1 \text{ mbar}} \cdot \frac{10^5 \text{ Pa}}{1 \text{ bar}} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{101325 \text{ Pa}} = 1,014 \text{ atm}$$

   y después aplicamos la ley de Boyle (suponemos que la temperatura se mantiene constante):

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

$$1,014 \cdot 320 = 1,7 \cdot V_2$$

$$V_2 = \frac{1,014 \cdot 320}{1,7} = 190,9 \text{ cm}^3$$

   y comprobamos que al aumentar la presión se reduce el volumen.

6. Calcula la presión ejercida por 2,5 L de un gas ideal si se sabe que a la misma temperatura y a 5 atm ocupa un volumen de 100 mL.

   Solución. Aplicamos la ley de Boyle:

   $$P_1V_1 = P_2V_2$$

   $$P_2 = \frac{P_1V_1}{V_2} = \frac{5 \cdot 100}{2500} = 0,2 \text{ atm}$$

   y comprobamos que al aumentar el volumen la presión disminuye.

7. Si la presión de 10 L de hidrógeno se triplica a temperatura constante, ¿en qué porcentaje cambiará el volumen?

   Solución. Aplicamos la ley de Boyle:

   $$P_1V_1 = P_2V_2$$

   nos dicen que $P_2 = 3P_1$, sustituimos:

   $$P_1V_1 = 3P_1V_2$$

   se simplifican las P_1:

   $$V_1 = 3V_2$$

   y despejamos el volumen final:

   $$V_2 = \frac{V_1}{3} = \frac{10}{3} = 3,33 \text{ L}$$

   vemos que el volumen se reduce a la tercera parte, pero nos preguntan en qué porcentaje cambia:

   $$\frac{10 - \frac{10}{3}}{10} \cdot 100 = 66,6\,\%$$

   por lo que el volumen se reduce en un 66 %.

8. Se sabe que cierta cantidad de gas ideal a 20 °C ocupa un volumen de 10 L cuando el manómetro indica 780 mmHg. *a*) Calcula la cantidad de gas en mol. *b*) Calcula el número de partículas gaseosas allí existentes. *c*) Calcula el volumen que ocuparían en condiciones normales.

   Solución. *a*) Usamos la ecuación general de los gases ideales. Usaremos R=0,081 $\frac{\text{atm}\cdot\text{L}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$ así que ponemos la temperatura en kelvin, el volumen en litros y la presión en atmósferas:

   $$T = 20 + 273 = 293 \text{ K} \qquad\qquad P = \frac{780}{760} = 1,026 \text{ atm}$$

   $$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} = \frac{1,026 \cdot 10}{0,082 \cdot 293} = 0,427 \text{ mol}$$

   b) Multiplicando los moles por el número de Avogadro obtenemos el número de partículas gaseosas: $2,57 \cdot 10^{23}$.

   c) Las condiciones normales son presión 1 atm y temperatura 0 °C por lo que:

   $$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} = \frac{0,427 \cdot 0,082 \cdot 273}{1} = 9,55 \text{ L}$$

9. Un gas ocupa un volumen de 80 cm^3 a 10 °C y 715 mmHg. ¿Qué volumen ocupará este gas en condiciones normales?

   Solución. Calculamos los moles (hacemos los cambios de unidades directamente en la fórmula):

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} = \frac{\frac{715}{760} \cdot \frac{80}{1000}}{0,082 \cdot 283} = 0,0032 \text{ mol}$$

   y ahora calculamos el volumen en las nuevas condiciones:

$$PV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} = \frac{0,0032 \cdot 0,082 \cdot 273}{1} = 0,072 \text{ L} = 72,6 \text{ cm}^3$$

   Como los moles no cambian también lo podríamos haber hecho así:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

10. Tenemos 400 cm^3 de oxígeno en condiciones normales. ¿Qué presión ejercerá un volumen de 500 cm^3 si la temperatura aumenta en 25 °C?

    Solución. La cantidad de sustancia (moles) no cambia por lo que usamos:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

    Como en la fórmula no hay ninguna constante con unidades podemos usar cualquier unidad siempre y cuando sean las mismas en ambos miembros:

$$P_2 = \frac{P_1V_1T_2}{T_1V_2} = \frac{1 \cdot 400 \cdot 298}{273 \cdot 500} = 0,87 \text{ atm}$$

    por lo que presión disminuye de 1 a 0,87 atm.

11. Calcula la densidad del cloruro de hidrógeno a 650 mmHg y 70 °C.

    Solución. La densidad es:

$$d = \frac{m}{V}$$

    y la cantidad de sustancia es:

$$n = \frac{m}{M}$$

    donde m es la masa de la sustancia y M su masa molar. Sustituyendo en la ecuación general de los gases ideales:

$$PV = nRT$$
$$PV = \frac{m}{M}RT$$
$$PM = \frac{m}{V}RT$$
$$PM = dRT$$

y ahora podemos calcular la densidad que nos piden:

$$d = \frac{PM}{RT}$$

$$d = \frac{\frac{650}{760} \cdot 36,5}{0,082 \cdot 342} = 1,11\ \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

hemos puesto como unidad $\frac{\text{g}}{\text{L}}$ puesto que hemos puesto la masa molar en gramos y al usar R=0,081 el volumen está en litros. Sabemos que el cloruro de hidrógeno es un gas y vemos que el resultado es plausible puesto que la densidad del agua es 1000 $\frac{\text{g}}{\text{L}}$ y un gas es mucho menos denso que el agua, en este caso casi mil veces menos.

12. La densidad de un gas en condiciones normales es 1,48 g/L. ¿Cuál será su densidad a 320 K y 730 mmHg?

    Solución. Obtenemos la masa molar:

    $$PM = dRT$$

    $$M = \frac{dRT}{P}$$

    $$M = \frac{1,48 \cdot 0,082 \cdot 273}{1} = 33,13\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

    y obtenemos la nueva densidad a partir de las nuevas condiciones:

    $$d = \frac{PM}{RT}$$

    $$d = \frac{\frac{730}{760} \cdot 33,13}{0,082 \cdot 320} = 1,21\ \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

13. ¿Qué volumen ocupan, en condiciones normales, 14 g de nitrógeno?

    Solución. Obtenemos la cantidad de sustancia sabiendo que el nitrógeno es un gas diatómico:

    $$n = \frac{m}{M} = \frac{14}{28} = 0,5 \text{ mol}$$

    y despejamos en la ecuación general de los gases:

    $$V = \frac{nRT}{P} = \frac{0,5 \cdot 0,082 \cdot 273}{1} = 11,2 \text{ L}$$

14. Se tienen 4 L de un gas en condiciones normales. *a*) ¿Qué volumen ocuparán a 30 ºC y 2 atm de presión? *b*) ¿Cuántas partículas de gas hay en la muestra?

    Solución. *a*) Calculamos la cantidad de sustancia:

    $$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1 \cdot 4}{0,082 \cdot 273} = 0,18 \text{ mol}$$

    y calculamos el volumen que ocupa en las nuevas condiciones:

    $$V = \frac{nRT}{P} = \frac{0,18 \cdot 0,082 \cdot 303}{2} = 2,24 \text{ L}$$

    b) Multiplicando la cantidad de sustancia por el número de Avogadro obtenemos el número de partículas: $1,08 \cdot 10^{23}$.

15. Sabiendo que la densidad media del aire a 0º C y 1 atm de presión es 1,293 g/L, calcula la masa molecular media del aire. A partir de:

$$PM = dRT$$

$$M = \frac{dRT}{P} = \frac{1,293 \cdot 0,082 \cdot 273}{1} = 28,95\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

y esta es la masa molecular media del aire, que se puede calcular también a partir de la masa molecular de las sustancias que componen el aire y de su concentración, por ejemplo, considerando que el aire esté formado solo por 21 % de oxígeno y 79 % de nitrógeno: $0,21 \cdot 32 + 0,79 \cdot 28 = 28,84\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

16. Calcula las presiones parciales que ejercen cada uno de los gases de una mezcla formada por 4 g de hidrógeno y 8 g de oxígeno si el manómetro instalado en el recipiente marca 2 atm.

Solución. Vamos a aplicar la ley de Dalton de las presiones parciales. Calculamos la cantidad de sustancia de cada gas:

$$n_{\text{H}_2} = \frac{m}{M} = \frac{4}{2} = 2\ \text{mol}$$

$$n_{\text{O}_2} = \frac{m}{M} = \frac{8}{32} = 0,25\ \text{mol}$$

$$n_{\text{total}} = n_{\text{H}_2} + n_{\text{O}_2} = 2,25\ \text{mol}$$

Calculamos las fracciones molares de cada gas:

$$x_{\text{H}_2} = \frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{total}}} = \frac{2}{2,25} = 0,88$$

$$x_{\text{O}_2} = \frac{n_{\text{O}_2}}{n_{\text{total}}} = \frac{0,25}{2,25} = 0,11$$

y no tienen unidades puesto que son un tanto por uno. De hecho una vez hallada una podríamos obtener la otra por resta:

$$x_{\text{O}_2} = 1 - x_{\text{H}_2} = 1 - 0,88 = 0,11$$

y aplicamos la ley de Dalton:

$$P_{\text{H}_2} = x_{\text{H}_2} \cdot P_{\text{T}} = 0,88 \cdot 2 = 1,77\ \text{atm}$$

$$P_{\text{O}_2} = x_{\text{O}_2} \cdot P_{\text{T}} = 0,22\ \text{atm}$$

17. ¿A qué temperatura hierve un líquido?

Solución. Depende de la presión a la que se encuentre. Por ejemplo, el agua ebulle a 100 ºC si está a 1 atm pero si está a más presión ebulle a una temperatura superior. Ello es debido a la presión de vapor. Por ejemplo las ollas a presión mantienen su interior a una presión superior a la atmosférica y por tanto el agua ebulle a más de 100 ºC, permitiendo por tanto que los alimentos se cocinen mucho más rápido (al estar a más temperatura). De esta manera se ahorra tiempo y energía.

18. En los pueblos de alta montaña lleva más tiempo cocinar las legumbres en agua hirviendo que en los pueblos de la costa, ¿por qué?

    Solución. Porque conforme ascendemos desciende la presión atmosférica y también desciende la temperatura de ebullición del agua. De esta manera, si cocinamos en una olla convencional, el agua hierve por debajo de 100 °C y al tener menor temperatura tardan más en cocinarse.

DISOLUCIONES

1. Calcula la concentración, en porcentaje en masa, de la disolución obtenida al mezclar 10 g de carbonato de sodio con 100 g de agua destilada.

   Solución. Tenemos 10 g de soluto y 100 g de disolvente, por tanto tenemos 110 g de disolución:

$$C = \frac{m_{\text{soluto}}}{m_{\text{disolución}}} \cdot 100 = \frac{10 \text{ g soluto}}{110 \text{ g disolución}} \cdot 100 = 9,09\,\%$$

2. La densidad de 200 mL de disolución de yoduro de potasio en agua al 40 % en masa es 1,2 g/cm^3, ¿qué cantidades de soluto y disolvente se hallan presentes?

   Solución. Mediante la densidad de la disolución averiguamos la masa de 200 mL de disolución(1 mL=1 cm^3):

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d \cdot V = 1,2 \cdot 200 = 240 \text{ g}$$

   La disolución al 40 % en masa significa:

$$\frac{40 \text{ g soluto}}{100 \text{ g disolución}}$$

   por lo que:

$$\frac{40 \text{ g soluto}}{100 \text{ g disolución}} \cdot 240 \text{ g disolución} = 96 \text{ g soluto}$$

   y

$$240 - 96 = 144 \text{ g disolución}.$$

3. Se desea preparar 600 mL de disolución de alcohol en agua al 10 % en volumen. Calcula las cantidades de alcohol y agua destilada que deben mezclarse.

   Solución. El matraz aforado nos facilita el trabajo. Calculamos el volumen de soluto:

$$10\,\% = \frac{10 \text{ mL soluto}}{100 \text{ mL disolución}} \cdot 600 \text{ mL disolución} = 60 \text{ mL soluto},$$

   lo medimos con una pipeta y lo vertemos en un matraz aforado de 600 mL y después simplemente añadimos agua destilada hasta la marca de enrase, recordando que el menisco tiene que quedar por encima de ella. Así nos despreocupamos de tener que medir $600 - 60 = 540$ mL de agua destilada.

4. Calcula la molaridad de la disolución obtenida al mezclar 15 g de hidróxido de calcio, con el agua suficiente hasta enrasar 0,5 L .

   Solución. Calculamos la cantidad de sustancia de $Ca(OH)_2$:

   $$n = \frac{m}{M} = \frac{15}{74} = 0,20 \ \text{mol}$$

   donde M es la masa molar del hidróxido de calcio. Como sabemos que la disolución tiene un volumen de 0,5 L aplicamos la definición de molaridad:

   $$M = \frac{n}{V} = \frac{0,20}{0,5} = 0,4 \ \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

   donde M en este caso significa molaridad.

5. Se disuelven 5 mL de ácido nítrico comercial del 70 % y de densidad 1,42 g/mL en agua destilada y posteriormente se completa con más agua destilada hasta formar 1 L de disolución. Calcula la molaridad de la misma.

   Solución. Nos dicen que extraemos 5 mL de ácido concentrado para obtener una disolución más diluida. En el laboratorio usaremos la pipeta para extraer los 5 mL de la botella de ácido comercial. Los verteremos en un matraz aforado de 1 L y posteriormente echaremos agua destilada hasta enrasar. Para calcular la molaridad necesitamos saber cuántos gramos de ácido puro hay en 5 mL de ácido concentrado. Como nos dan la densidad primero pasamos los 5 mL a gramos y con el tanto por ciento averiguamos los gramos de ácido puro:

   $$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d \cdot V = 1,42 \cdot 5 = 7,1 \text{ g ácido concentrado}$$

   $$\frac{70 \text{ g ácido puro}}{100 \text{ g ácido concentrado}} \cdot 7,1 \text{ g ácido concentrado} = 4,97 \text{ g ácido puro}$$

   y ya podemos calcular la molaridad:

   $$M_{HNO_3} = 1 + 14 + 3 \cdot 16 = 63 \text{ g}$$

   $$M = \frac{n}{V} = \frac{\frac{m}{M}}{V} = \frac{\frac{4,97}{63}}{1} = 0,078 \ \frac{\text{mol}}{\text{L}} = 0,078 \text{ M}$$

   donde el resultado se puede leer 0,078 moles por litro o 0,078 molar por lo que M significa molaridad y molar, depende de si indica magnitud o unidad.

6. Determina la molalidad de: *a*) Una disolución obtenida disolviendo 10 g de hidróxido de sodio en 200 mL de agua. *b*) Una disolución de nitrato potásico al 20 % en masa.

   Solución. *a*)

   $$d_{\text{agua}} = 1 \text{ g/mL} \qquad n_{\text{soluto}} = \frac{n}{M} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ g/mol}$$

   $$m = \frac{n_{\text{soluto}}}{m_{\text{disolvente}}} = \frac{0,25 \text{ mol}}{0,2 \text{ kg}} = 1,25 \ \frac{\text{mol}}{\text{kg}}$$

b) El 20 % en masa significa:

$$20\,\% = \frac{20 \text{ g soluto}}{100 \text{ g disolución}}$$

y por tanto habrá 80 g de disolvente. Calculamos la molalidad:

$$m = \frac{n_{\text{soluto}}}{m_{\text{disolvente}}} = \frac{\frac{20}{101} \text{ mol}}{80 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} = 2,47\ \frac{\text{mol}}{\text{kg}}$$

7. Halla las fracciones molares de los componentes de una disolución que se ha obtenido al disolver 2 g de hidróxido de sodio en 100 mL de agua.

   Solución. Tenemos 2 g de soluto y 100 g de disolvente, calculamos las fracciones molares:

$$n_{\text{NaOH}} = \frac{n}{M} = \frac{2}{40} = 0,05 \text{ mol}$$

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n}{M} = \frac{100}{18} = 5,56 \text{ mol}$$

$$x_{\text{NaOH}} = \frac{n_{\text{NaOH}}}{n_{\text{total}}} = \frac{0,05}{0,05 + 5,56} = 8,91 \cdot 10^{-3}$$

$$x_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{\text{total}}} = \frac{5,56}{0,05 + 5,56} = 8,91 \cdot 10^{-3} = 0,99$$

8. El agua de mar contiene un 2,8 % de cloruro de sodio y tiene una densidad de 1,02 g/cm^3 a una cierta temperatura. Calcula el volumen de agua de mar necesario para obtener 1 kg de cloruro de sodio.

   Solución.

$$1000 \text{ g NaCl} \cdot \frac{100 \text{ g agua marina}}{2,8 \text{ NaCl}} \cdot \frac{1 \text{ cm}^3 \text{ agua marina}}{1,02 \text{ g agua marina}} = 35\,014 \text{ cm}^3$$

9. Se prepara una disolución con 5 g de hidróxido de sodio en 25 g de agua destilada. Si el volumen final es de 27,1 cm^3, calcula la concentración de la disolución en: *a*) Porcentaje en masa. *b*) Masa (g) por litro. *c*) Molaridad. *d*) Molalidad. *e*) Fración molar del soluto.

   Solución.

$$a)\ C = \frac{5}{30} \cdot 100 = 16,67\,\%$$

$$b)\ C = \frac{5}{27,1 \cdot 10^{-3}} = 184,50 \text{ g/L}$$

$$c)\ M = \frac{\frac{5}{40}}{27,1 \cdot 10^{-3}} = 4,61 \text{ mol/L}$$

$$d)\ m = \frac{\frac{5}{40}}{25 \cdot 10^{-3}} = 5 \text{ mol/kg}$$

$$e)\ x_{\text{soluto}} = \frac{\frac{5}{40}}{\frac{5}{40} + \frac{25}{18}} = 0,08 \text{ mol/kg}$$

10. En 100 cm^3 de una disolución de ácido clorhídrico hay 6 g de dicho ácido. *a*) Determina la cantidad de esta sustancia en mol. *b*) La molaridad de la disolución.

    Solución.

$$a)\ n_{\mathrm{HCl}} = \frac{m}{M} = \frac{6}{36,5} = 0,16 \text{ mol}$$

$$b)\ M = \frac{n}{V} = \frac{0,16}{0,1} = 1,64 \text{ mol/L}$$

11. Halla la cantidad, en gramos, de nitrato de potasio y agua destilada necesarios para preparar un volumen de 250 cm^3 de disolución al 20 %. La densidad de la disolución es de 1,2 g/cm^3.

    Solución. Calculamos la masa que tienen 250 cm^3 de disolución:

$$d = \frac{m}{V} \Rightarrow m = d \cdot V = 1,2 \cdot 250 = 300 \text{ g}$$

    Calculamos qué parte corresponde al nitrato de potasio:

$$300 \cdot 0,2 = 60 \text{ g}$$

    y la resta será el agua destilada $300 - 60 = 240$ g.

12. *a*) ¿Qué cantidad de ácido sulfúrico puro hay contenida en 100 cm^3 de disolución 0,2 M de dicho ácido? *b*) Para preparar la disolución del apartado anterior diponemos de ácido sulfúrico comercial al 96 % y densidad 1,84 g/cm^3. Calcula el volumen de ácido que hay que incluir para obtener los 100 cm^3 de disolución 0,2 M.

    Solución. *a*) La masa molar del ácido sulfúrico es:

$$M = 2 + 32 + 4 \cdot 16 = 98 \text{ g/mol}$$

    Calculamos la cantidad de sustancia de ácido sulfúrico puro:

$$M = \frac{n}{V} \Rightarrow n = M \cdot V = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02 \text{ mol}$$

    y la masa de ácido sulfúrico puro:

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow m = n \cdot M = 0,02 \cdot 98 = 1,96 \text{ g}$$

    b) El volumen de ácido comercial que contiene 1,96 g de ácido puro es:

$$1,96 \text{ g puro} \cdot \frac{100 \text{ g comercial}}{96 \text{ g puro}} \cdot \frac{1 \text{ cm}^3 \text{ comercial}}{1,84 \text{ g comercial}} = 1,11 \text{ cm}^3 \text{ comercial}$$

13. Partiendo de una disolución 2 M de ácido nítrico, indica cómo prepararías 1 L de otra disolución del mismo ácido, pero de concentración 1 M.

    Solución. Nos piden 1 litro de una disolución 1 molar. En ese volumen hay 1 mol de soluto. En medio litro de la disolución 2 M hay un mol, por tanto le extraemos medio litro y lo echamos en un matraz de un litro y rellenamos con agua destilada hasta el enrase.

14. Tomamos 10 mL de ácido sulfúrico comercial al 96 % y de densidad 1,84 g/cm^3 y lo añadimos, con precaución, a un matraz de 1/2 L lleno hasta la mitad de agua destilada. Agitamos la mezcla y añadimos más agua destilada hasta el nivel de 1/2 L . Indica la molaridad y molalidad de la disolución así preparada.

    Solución. Sabiendo que 1 mL=1cm^3 calculamos la cantidad de sustancia de ácido puro:

    $$10 \text{ ml comercial} \cdot \frac{1,84 \text{ g comercial}}{1 \text{ cm}^3 \text{ comercial}} \cdot \frac{96 \text{ g puro}}{100 \text{ g comercial}} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{98 \text{ g}} = 0,18 \text{ mol}$$

    La molaridad es:

    $$M = \frac{n}{V} = \frac{0,18}{0,5} = 0,36 \text{ mol/L}$$

    Para la molalidad tenemos que calcular la masa del disolvente. Si añadimos 10 mL de ácido comercial significa que echamos 490 mL de agua destilada. Pero tenemos que tener en cuenta que en los 10 mL hay un 4 % de agua:

    $$10 \text{ ml comercial} \cdot \frac{1,84 \text{ g comercial}}{1 \text{ cm}^3 \text{ comercial}} \cdot \frac{4 \text{ g agua}}{100 \text{ g comercial}} = 0,736 \text{ g agua}$$

    así que tenemos $490 + 0,736 = 490,736$ g de disolvente:

    $$m = \frac{n}{m} = \frac{0,18}{0,490736} = 0,37 \text{ mol/kg}$$

    Al disolverse ácido sulfúrico concentrado en agua se desprende mucho calor y por eso en el ejercicio dice que se vierte el ácido sobre el matraz medio lleno de agua, porque el agua tiene una capacidad calorífica muy alta y absorbe mucho calor sin apenas variar su temperatura y así esa masa de agua absorbe el calor de dilución. Si lo hacemos al revés, corremos el riesgo de que el agua que vertemos llegue a hervir (porque la echamos poco a poco) y nos produzca salpicaduras (en ese caso hay aclararse rápidamente con agua y si no llevamos gafas de seguridad de laboratorio y nos entró en el ojo usar la ducha de ojos del laboratorio).

15. Queremos preparar 2 L de disolución de ácido clorhídrico 0,5 M. Calcula el volumen de HCl comercial al 37,5 % y densidad 1,19 g/cm^3 que debemos añadir al matraz aforado, así como la cantidad de agua destilada necesaria para completar el volumen de disolución.

    Solución. Calculamos la masa de ácido puro que tiene que llevar la disolución 0,5 molar que nos piden:

    $$\frac{0,5 \text{ mol}}{1 \text{ L}} \cdot 2 \text{ L} = 1 \text{ mol}$$

    $$1 \text{ mol} \cdot \frac{36,5 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 36,5 \text{ g}$$

    y calculamos el volumen de ácido comercial que contiene 36,5 g de ácido puro:

    $$36,5 \text{ g puro} \cdot \frac{100 \text{ g comercial}}{37,5 \text{ g puro}} \cdot \frac{1 \text{ cm}^3 \text{ comercial}}{1,19 \text{ g comercial}} = 81,79 \text{ cm}^3 \text{ comercial}$$

    y el volumen de agua destilada es $2000 - 81,79 = 1918,21$ cm^3.

16. Los productos homeopáticos se realizan mediante sucesivas diluciones de una disolución inicial. En cada dilución la concentración se reduce a la centésima parte de la anterior y los/as homeópatas consideran que cuánto más diluido sea más potente es. De hecho trabajan habitualmente con diluciones realizadas en 30 pasos. Considerando una disolución 1 molar demuestra que en un producto homeopático diluido treinta veces no queda ninguna partícula de la disolución original y que por tanto es disolvente puro.

    Solución. Si en cada paso se diluye en la centésima parte es lo mismo que multiplicar por 10^{-2} y en 30 pasos es igual que multiplicar por $(10^{-2})^{30} = 10^{-60}$, por tanto si partimos de 1 molar, en el último paso tendríamos:

    $$\frac{10^{-60}\ \text{mol}}{1\ \text{L}} \cdot \frac{6,022 \cdot 10^{23}\ \text{moléculas}}{1\ \text{mol}} = 6,022 \cdot 10^{-37}\ \text{moléculas}$$

    Si 10^{23} es un número inimaginablemente alto (un 1 seguido de 23 ceros), 10^{-37} simplemente es cero $(0,00000000000000000000001)$, por lo que no hay ninguna molécula. Resumiendo: es un timo.

17. Mezclamos 400 mL de una disolución 0,5 M de amoniaco con 100 mL de una disolución 2 M de la misma sustancia. ¿Qué concentración en molaridad tendrá la disolución resultante?

    Solución. Calculamos la cantidad de sustancia que aporta cada disolución:

    $$\frac{0,5\ \text{mol}}{1\ \text{L}} \cdot 0,4\ \text{L} = 0,2\ \text{mol}$$

    $$\frac{2\ \text{mol}}{1\ \text{L}} \cdot 0,1\ \text{L} = 0,2\ \text{mol}$$

    y la nueva disolución tendrá 0,4 mol y ocupará un volumen de 0,5 L (mucho ojo no nos olvidemos de sumar los volúmenes de las disoluciones) por lo que la concentración expresada en molaridad será:

    $$M = \frac{0,4\ \text{mol}}{0,5\ \text{L}} = 0,8\ \text{M}$$

18. Calcula el ascenso ebulloscópico que sufre 1 kg de agua cuando se disuelve en él 342 g de sacarosa ($C_{12}H_{22}O_{11}$). Dato: $k_\text{e} = 0,52\ \frac{^\text{o}\text{C}\cdot\text{kg}}{\text{mol}}$.

    Solución. La temperatura de ebullición varía al disolver el soluto conforme a:

    $$T' - T_\text{e} = k_\text{e} \cdot m$$

    y el ascenso ebulloscópico será:

    $$\Delta T = T' - T_\text{e}$$

    Calculamos la masa molar del soluto:

    $$M = 12 \cdot 12 + 22 \cdot 1 + 11 \cdot 16 = 342\ \text{g/mol}$$

y calculamos la molalidad (ponemos subíndices a m para no confundir las magnitudes):

$$m = \frac{n_\mathrm{s}}{m_\mathrm{d}} = \frac{\frac{m_\mathrm{s}}{M}}{m_\mathrm{d}} = \frac{\frac{342}{342}}{1} = 1 \text{ mol/kg}$$

y calculamos el ascenso ebulloscópico:

$$\Delta T = k_\mathrm{e} \cdot m = 0,52 \cdot 1 = 0,52\ ^\mathrm{o}\mathrm{C}$$

19. ¿A qué temperatura hierve una disolución formada por 9,2 g de glicerina ($C_3H_8O_3$) y 100 g de agua (a presión normal)? Dato: $k_\mathrm{e} = 0,52\ \frac{^\mathrm{o}\mathrm{C}\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$.

    Solución. El agua pura hierve a 100 ºC a 1 atm de presión pero al disolver un soluto se incrementa dicha temperatura según la ecuación:

    $$T' = T_\mathrm{e} + k_\mathrm{e} \cdot m$$

    La masa molar de la glicerina vale 92 g/mol y la masa de disolvente son 0,1 kg por lo que:

    $$T' = 100 + 0,52 \cdot \frac{\frac{9,2}{92}}{0,1} = 100,52\ ^\mathrm{o}\mathrm{C}$$

20. Calcula la temperatura de congelación y de ebullición de una disolución formada por 20 g de agua y 9,5 g de etilenglicol (anticongelante usado en los automóviles cuya fórmula es CH_2OH–CH_2OH). Datos: $k_\mathrm{e} = 0,52\ \frac{^\mathrm{o}\mathrm{C}\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$ y $k_\mathrm{c} = 1,86\ \frac{^\mathrm{o}\mathrm{C}\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$.

    Solución. La masa molar del etilenglicol son 62 g/mol y la temperatura de ebullición es:

    $$T' = T_\mathrm{e} + k_\mathrm{e} \cdot m$$

    $$T' = 100 + 0,52 \cdot \frac{\frac{9,5}{62}}{0,02} = 103,98\ ^\mathrm{o}\mathrm{C}$$

    y la de congelación:

    $$T' = T_\mathrm{c} - k_\mathrm{c} \cdot m$$

    $$T' = 0 - 1,86 \cdot \frac{\frac{9,5}{62}}{0,02} = -14,25\ ^\mathrm{o}\mathrm{C}$$

    De esta manera evitamos que el agua del radiador del coche se congele en invierno y dañe el sistema de refrigeración.

21. Averigua cuál será el punto de ebullición de una disolución que contiene 10,83 g de un compuesto orgánico cuya masa molar es de 120 g/mol disuelto en 250 g de ácido acético ($C_2H_4O_2$). Datos: $K\mathrm{e} = 3,07$ (ºC kg)/mol; $T\mathrm{e} = 118$ ºC.

    Solución. En este caso el disolvente es el ácido acético (CH_3COOH) y ponemos su temperatura de ebullición y su constante ebulloscópica en la fórmula:

    $$T' = T_\mathrm{e} + k_\mathrm{e} \cdot m$$

    $$T' = 118 + 3,07 \cdot \frac{\frac{10,83}{120}}{0,25} = 119,11\ ^\mathrm{o}\mathrm{C}$$

22. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: *a*) ¡¡Cuando una disolución alcanza las saturación, no puede disolverse más soluto en esa cantidad de disolvente¿¿. *b*) ¡¡Una disolución puede ser saturada y diluida al mismo tiempo¿¿.

    Solución. *a*) Cierto, a no ser que se incremente la temperatura. *b*) Cierto, si la sustancia es muy insoluble, en seguida se satura pero se encontrará muy diluida.

23. ¿Por qué las inyecciones intravenosas deben ser isotónicas (esto es, tienen la misma presión osmótica) con el suero sanguíneo?

    Solución. La membrana de las células es una membrana semipermeable que permite pasar el agua de la zona menos concentrada a la más concentrada. Si inyectamos un fluido menos concentrado (hipotónico) que los fluidos del cuerpo, entrará agua en las células y pueden reventar. Si ocurre al revés (hipertónico) el agua saldrá de las células y se deshidratarán. Por la misma razón para hidratarse tras el ejercicio físico no es adecuada agua (hipotónica) ni un refresco (hipertónico). Hay bebidas especializadas pero si en un litro de agua exprimimos un limón y le echamos una pizca de sal (la punta de un cuchillo) y otra pizca de hidrógenocarbonato de sodio (bicarbonato de sodio) conseguimos lo mismo.

24. ¿Qué pasaría si se regara con agua salada una planta cultivada en una maceta?

    Solución. Que sus células se deshidratarán.

25. ¿Por qué se hinchan las uvas pasas al meterlas en agua?

    Solución. Porque la piel de las uvas pasas es una membrana semipermeable y deja pasar el agua para contrarestar la diferencia de concentraciones entre el interior y exterior de la uva.

26. La presión osmótica de una disolución, es 4,2 atm a 20 °C. ¿Qué presión osmótica tendrá a 50 °C?

    Solución. Tenemos una disolución en contacto, mediante una membrana semipermeable, con una disolución menos concentrada, por tanto para impedir que el agua atraviese la membrana tenemos que aplicar una presión que equilibre a la presión osmótica. La ecuación de van't Hoff rige el fenómeno:

    $$\mathit{\Pi} V = nRT$$

    Si se aumenta la temperatura, sabemos por la teoría cinética que las partículas se moverán más deprisa y aumentará la presión osmótica. Como queremos que el sistema siga igual, el volumen y la concentración se mantendrán constantes por lo que se cumple:

    $$\frac{\mathit{\Pi}}{T} = \frac{nR}{V}$$
    $$\frac{\mathit{\Pi}}{T} = \text{cte.}$$
    $$\frac{\mathit{\Pi}_1}{T_1} = \frac{\mathit{\Pi}_2}{T_2}$$

    y calculamos la nueva presión:

    $$\mathit{\Pi}_2 = T_2 \cdot \frac{\mathit{\Pi}_1}{T_1} = 323 \cdot \frac{4,2}{293} = 4,63 \text{ atm}$$

27. Se disuelven 2,3 g de un hidrocarburo no volatil en 97,7 g de benceno (C_6H_6). La presión de vapor de la disolución a 20 °C es de 73,62 mmHg y la del benceno es de 74,66 mmHg. Halla la masa molar del hidrocarburo.

    Solución. Tenemos 97,7 g de disolvente y su masa molar vale 78 g/mol. Aplicamos la ley de Raoult:

    $$P'_V = P^{o}{}_V \cdot x_{\mathrm{d}}$$

    sustituimos por los valores correspondientes:

    $$73,62 = 74,66 \cdot \frac{\frac{97,7}{78}}{\frac{97,7}{78} + \frac{2,3}{M_{\mathrm{s}}}}$$

    reordenamos:

    $$\frac{73,62 \cdot 78}{74,66 \cdot 97,7} = \frac{1}{\frac{97,7}{78} + \frac{2,3}{M_{\mathrm{s}}}}$$

    hacemos la inversa de las fracciones:

    $$\frac{74,66 \cdot 97,7}{73,62 \cdot 78} = \frac{97,7}{78} + \frac{2,3}{M_{\mathrm{s}}}$$

    reordenamos de nuevo:

    $$\frac{74,66 \cdot 97,7}{73,62 \cdot 78} - \frac{97,7}{78} = \frac{2,3}{M_{\mathrm{s}}}$$

    y dejamos a la incógnita sola:

    $$M_{\mathrm{s}} = \frac{2,3}{\frac{74,66 \cdot 97,7}{73,62 \cdot 78} - \frac{97,7}{78}} = 129,98\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

28. Suponiendo un comportamiento ideal, ¿cuál sería la presión de vapor de la disolución obtenida al mezclar 500 mL de agua y 90 g de glucosa ($C_6H_{12}O_6$) si la presión de vapor del agua a la temperatura de la mezcla es de 55,3 mmHg?

    Solución. Aplicamos la ley de Raoult:

    $$P'_V = P^{o}{}_V \cdot x_{\mathrm{d}}$$

    $$P'_V = 55,3 \cdot \frac{\frac{500}{18}}{\frac{500}{18} + \frac{90}{180}}$$

    $$P'_V = 55,3 \cdot 0,98 = 54,32\ \mathrm{mmHg}$$

29. Para secar antes tu bañador, ¿lo enjuagarías con agua dulce o salada? ¿Por qué?

    Solución. En agua dulce. Porque al echar sal al agua, por la ley de Raoult, desciende la presión de vapor y por tanto se evapora más despacio.

REACCIONES QUÍMICAS

1. Ajusta las siguientes reacciones químicas:
   a) $H_2 + Br_2 \rightarrow HBr$
   b) $C + O_2 \rightarrow CO_2$
   c) $C + O_2 \rightarrow CO$
   d) $I_2 + O_2 \rightarrow I_2O_5$
   e) $N_2 + H_2 \rightarrow NH_3$
   f) $Br_2 + O_2 \rightarrow Br_2O_7$
   g) $Al + O_2 \rightarrow Al_2O_3$
   h) $CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$
   i) $NH_3 + O_2 \rightarrow NO + H_2O$
   j) $Mg_3N_2 + H_2O \rightarrow Mg(OH)_2 + NH_3$
   k) $KClO_3 \rightarrow KCl + O_2$
   l) $Al(NO_3)_3 + Na_2S \rightarrow Al_2S_3 + NaNO_3$
   m) $CaH_2 + H_2O \rightarrow H_2 + Ca(OH)_2$
   n) $KNO_3 \rightarrow O_2 + KNO_2$
   ñ) $FeS + O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2$
   o) $Ag + HNO_3 \rightarrow AgNO_3 + NO_2 + H_2O$
   p) $CaCO_3 + HCl \rightarrow CaCl_2 + CO_2 + H_2O$
   q) $SO_2 + O_2 \rightarrow SO_3$
   r) $Na_2CO_3 + Ca(OH)_2 \rightarrow NaOH + CaCO_3$

   Solución.
   a) $H_2 + Br_2 \rightarrow 2HBr$
   b) $C + O_2 \rightarrow CO_2$
   c) $C + \frac{1}{2}\,O_2 \rightarrow CO$
   d) $4I_2 + 5O_2 \rightarrow 2I_2O_5$
   e) $N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3$
   f) $4Br_2 + 7O_2 \rightarrow 2Br_2O_7$
   g) $4Al + 3O_2 \rightarrow 2Al_2O_3$
   h) $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$
   i) $2NH_3 + \frac{5}{2}O_2 \rightarrow 2NO + 3H_2O$
   j) $Mg_3N_2 + 6H_2O \rightarrow 3Mg(OH)_2 + 2NH_3$
   k) $2KClO_3 \rightarrow 2KCl + 3O_2$

   Suele resultar más sencillo si nos fijamos en el nitrato en vez de fijarnos en el nitrógeno y el oxígeno de manera individual, en este caso hay 3 nitratos en los reactivos y 1 en los productos:
   l) $2Al(NO_3)_3 + 3Na_2S \rightarrow Al_2S_3 + 6NaNO_3$
   m) $CaH_2 + 2H_2O \rightarrow 2H_2 + Ca(OH)_2$
   n) $KNO_3 \rightarrow \frac{1}{2}O_2 + KNO_2$
   ñ) $2FeS + \frac{7}{2}O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + 2SO_2$
   o) $Ag + 2HNO_3 \rightarrow AgNO_3 + NO_2 + H_2O$
   p) $CaCO_3 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + CO_2 + H_2O$
   q) $SO_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow SO_3$
   r) $Na_2CO_3 + Ca(OH)_2 \rightarrow 2NaOH + CaCO_3$

2. ¿Cuántos gramos de agua se obtienen cuando quemamos 10 moles de hidrógeno?

Solución. Ajustamos la reacción química y rellenamos el cuadro con los moles iniciales y finales:

$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O$$

	H_2	H_2O
moles iniciales	10	0
moles finales	0	10

nos dicen que hay 10 moles iniciales de hidrógeno y cuando reaccionen todos quedarán 0 moles de hidrógeno. Como de oxígeno no dicen nada significa que habrá cantidad suficiente. Inicialmente de producto no hay nada y una que vez que ocurra la reacción se producirán 10 moles de agua puesto que por cada mol que reaccione de hidrógeno se forma un mol de agua. Procedemos a calcular la masa de agua:

$$10 \text{ mol } H_2 \cdot \frac{1 \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol } H_2} \cdot \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} = 180 \text{ g } H_2O$$

3. Si quemamos 4 g de hidrógeno, ¿cuántos gramos hemos gastado de oxígeno? ¿Y cuántos hemos obtenido de agua?

   Solución. Cuatro gramos de hidrógeno son 2 moles. Esos dos moles reaccionan con la mitad de moles de oxígeno, tal y como nos indica la estequiometría de la reacción y se obtiene el doble de moles de agua que de oxígeno o los mismos moles que de hidrógeno, ponemos estos valores en el cuadro de moles iniciales y finales:

	H_2 +	$\frac{1}{2}$ O_2 →	H_2O
moles iniciales	2	1	0
moles finales	0	0	2

   Así que se ha gastado 1 mol de oxígeno que equivale a 32 g y se obtienen 2 moles de agua que son 36 g.

4. Juntamos 4 moles de hidrógeno con 3 moles de oxígeno. ¿Cuántos moles nos quedan una vez completada la combustión?

   Solución. En este caso no tenemos las cantidades estequiométricas por lo que tenemos que ver quién es el reactivo limitante. 3 moles de oxígeno reaccionan con 6 de hidrógeno, pero no hay suficiente así que esto no ocurre. 4 moles de hidrógeno reaccionan con 2 moles de oxígeno y como tenemos 3, nos sobra uno. Rellenamos el cuadro con los moles iniciales y finales:

	H_2 +	$\frac{1}{2}$ O_2 →	H_2O
moles iniciales	4	3	0
moles finales	0	1	4

   Por tanto quedan 1 mol de oxígeno y 4 moles de agua.

5. Se hace arder, en atmósfera de oxígeno, 30 g de etano (C_2H_6). *a*) Calcula el volumen necesario de oxígeno en condiciones normales. *b*) Calcula el volumen necesario de oxígeno a presión 1,5 atm y temperatura 60 °C. *c*) Calcula el volumen de CO_2 que se ha obtenido en condiciones normales (CN).

Solución. En toda reacción de combustión el combustible reacciona con oxígeno y se obtiene dióxido de carbono y agua:

$$C_2H_6 + \frac{7}{2}O_2 \rightarrow 2\,CO_2 + 3H_2O$$

a) Sabiendo que todo gas en condiciones normales (CN) ocupa 22,4 L:

$$30 \text{ g etano} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{30 \text{ g etano}} \cdot \frac{7/2 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol etano}} \cdot \frac{22,4 \text{ L}}{1 \text{ mol CN}} = 78,4 \text{ L } O_2$$

b)

$$30 \text{ g etano} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{30 \text{ g etano}} \cdot \frac{7/2 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol etano}} = 3,5 \text{ mol } O_2$$

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{3,5 \cdot 0,082 \cdot 333}{1,5} = 63,71 \text{ L } O_2$$

c)

$$30 \text{ g etano} \cdot \frac{1 \text{ mol}}{30 \text{ g etano}} \cdot \frac{2 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol etano}} \cdot \frac{22,4 \text{ L}}{1 \text{ mol CN}} = 44,8 \text{ L } CO_2$$

6. Se hizo reaccionar, a altas temperaturas, 6,4 g de azufre con 6,5 g de hierro, originándose sulfuro de hierro(2+). *a*) ¿Cuál es el reactivo limitante? *b*) ¿Qué cantidad de producto se ha formado? *c*) ¿Qué cantidad de reactivo en exceso quedó al final de la reacción?

Solución. La reacción ajustada es:

$$\text{S} + \text{Fe} \rightarrow \text{FeS}$$

por lo que la reacción ocurre mol a mol. *a*) Tenemos:

$$n_{\text{S}} = \frac{6,4}{32} = 0,2 \text{ mol S}$$

$$n_{\text{Fe}} = \frac{6,5}{55,8} = 0,12 \text{ mol Fe}$$

por lo que el reactivo limitante es el hierro. *b*) Como hemos dicho que ocurre mol a mol se obtienen 0,12 moles de sal y:

$$m = n \cdot M = 0,12 \cdot 87,8 = 10,54 \text{ g sal}$$

c) Quedaron $0,2 - 0,12 = 0,08$ moles de azufre y:

$$m = n \cdot M = 0,08 \cdot 32 = 2,56 \text{ g azufre}$$

La misma información en forma de tabla:

	S +	Fe→	FeS
moles iniciales	0,2	0,12	0
moles finales	0,08	0	0,12

7. Se introducen 13,5 g de aluminio en 500 mL de una disolución 1,7 M de ácido sulfúrico. Sabiendo que uno de los productos es hidrógeno gaseoso, calcula: *a*) La cantidad de ácido sulfúrico que queda sin reaccionar. *b*) El volumen de gas obtenido a 27 ºC y 2 atm.

   Solución. El ácido ataca al metal, se desprende hidrógeno y se forma la sal:

$$2\,\mathrm{Al} + 3\,\mathrm{H_2SO_4} \rightarrow 3\,\mathrm{H_2} + \mathrm{Al_2(SO_4)_3}$$

   Calculamos la cantidad de sustancia de cada reactivo:

$$n = \frac{13,5}{27} = 0,5 \text{ mol Al} \qquad n = 1,7 \cdot 0,5 = 0,85 \text{ mol ácido}$$

   a) La proporción es 2 a 3:

$$0,5 \text{ mol Al} \cdot \frac{3 \text{ mol ácido}}{2 \text{ mol Al}} = 0,75 \text{ mol ácido}$$

   por lo que quedan 0,10 mol de ácido sin reaccionar. *b* La proporción es la misma por lo que:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{0,75 \cdot 0,082 \cdot 300}{2} = 9,2 \text{ L}$$

8. Calcula la cantidad mínima de mineral de cinc del 20 % de pureza que se necesita para que reaccione totalmente con 0,5 L de disolución 1 M de HCl. Los productos de la reacción son cloruro de cinc e hidrógeno.

   Solución. La reacción ajustada es:

$$\mathrm{Zn} + 2\,\mathrm{HCl} \rightarrow \mathrm{ZnCl_2} + \mathrm{H_2}$$

   Tenemos $n = M \cdot V = 1 \cdot 0,5 = 0,5$ mol de HCl y vemos que la proporción de Zn a ácido clorhídrico es 1 a 2, por lo que reaccionará la mitad de moles de Zn que de ácido: 0,25 mol de Zn. Calculamos la masa del mineral:

$$0,25 \text{ mol Zn} \cdot \frac{65,4 \text{ g Zn}}{1 \text{ mol Zn}} \cdot \frac{100 \text{ g mineral}}{20 \text{ g Zn}} = 81,75 \text{ g mineral.}$$

9. El carbonato de calcio de las rocas calizas se descompone, al ser calentado, en óxido de calcio y dióxido de carbono. *a*) Calcula la cantidad de CaO que se puede obtener a partir de la descomposición de 1 kg de roca caliza que contiene un 70 % de $CaCO_3$. *b*) El volumen de CO_2 obtenido a 17 ºC y 740 mmHg de presión.

   Solución. La reacción ajustada es:

$$\mathrm{CaCO_3} \rightarrow \mathrm{CaO} + \mathrm{CO_2}$$

   a)

$$1000 \text{ g caliza} \cdot \frac{70 \text{ g carbonato}}{100 \text{ caliza}} \cdot \frac{1 \text{ mol carbonato}}{100 \text{ g carbonato}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1 \text{ mol CaO}}{1 \text{ mol carbonato}} \cdot \frac{56 \text{ g CaO}}{1 \text{ mol CaO}} = 392 \text{ g CaO}$$

b)

$$10^3 \text{ g caliza} \cdot \frac{70 \text{ g carbonato}}{100 \text{ caliza}} \cdot \frac{1 \text{ mol carbonato}}{100 \text{ g carbonato}} \cdot \frac{1 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol carbonato}} = 7 \text{ mol } CO_2$$

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{7 \cdot 0,082 \cdot 290}{\frac{74}{76}} = 170,96 \text{ L } CO_2$$

10. Se desea obtener 45 g de cloruro de zinc haciendo reaccionar un exceso de sulfuro de zinc con la cantidad suficiente de ácido clorhídrico. *a*) Qué cantidad de ácido clorhídrico del 30 % se consumirá? *b*) ¿Qué volumen se producirá de sulfuro de hidrógeno medido en condiciones normales de presión y temperatura?

   Solución. Teniendo en cuenta el apartado *b*) podemos escribir la reacción completa:

$$ZnS + 2HCl \rightarrow ZnCl_2 + H_2S$$

a)

$$45 \text{ g } ZnCl_2 \cdot \frac{1 \text{ mol } ZnCl_2}{136,4 \text{ g } ZnCl_2} \cdot$$

$$\cdot \frac{2 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol } ZnCl_2} \cdot \frac{36,5 \text{ g HCl}}{1 \text{ mol HCl}} \cdot \frac{100 \text{ g comercial}}{30 \text{ g HCl}} = 80,28 \text{ g ácido comercial}$$

b)

$$45 \text{ g } ZnCl_2 \cdot \frac{1 \text{ mol } ZnCl_2}{136,4 \text{ g } ZnCl_2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1 \text{ mol } H_2S}{1 \text{ mol } ZnCl_2} \cdot \frac{22,4 \text{ L}}{1 \text{ mol } H_2S} = 7,39 \text{ L } H_2S$$

11. Al calentar 13,5 g de un hidrógenocarbonato de amonio (NH_4HCO_3) impuro, se obtienen 3,4 L de dióxido de carbono medido en condiciones normales. Halla la pureza del hidrogenocarbonato de amonio empleado (además de CO_2, se obtienen NH_3 y H_2O).

   Solución. Se trata de una reacción de descomposición, que ajustada es:

$$NH_4HCO_3 \rightarrow CO_2 + NH_3 + H_2O$$

Hallamos la masa pura de la sal:

$$3,4 \text{ L } CO_2 \cdot \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22,4 \text{ L } CO_2} \cdot \frac{1 \text{ mol sal}}{1 \text{ mol } CO_2} \cdot \frac{79 \text{ g sal}}{1 \text{ mol sal}} = 11,99 \text{ g sal}$$

y calculamos la pureza:

$$\frac{11,99}{13,5} \cdot 100 = 88,81\,\%$$

12. Se mezclan dos disoluciones, una de $AgNO_3$ y otra de NaCl, cada una de las cuales contiene 20 g de cada sustancia. Halla la masa de AgCl que se forma.

    Solución. Los reactivos son solubles en agua pero al reaccionar se produce cloruro de plata que es insoluble y precipita:

    $$\mathrm{AgNO_3 + NaCl \rightarrow AgCl + NaNO_3}$$

    Calculamos la cantidad de sustancia de cada reactivo:

    $$n = \frac{20}{169,8} = 0,12 \text{ mol nitrato} \qquad n = \frac{20}{58,5} = 0,34 \text{ mol cloruro}$$

    como la reacción es 1:1 vemos que el reactivo limitante es el nitrato y por tanto se formarán 0,12 mol de cloruro de plata y una masa de $0,12 \cdot 143,3 = 17,20$ g.

CINEMÁTICA I

1. Dibuja los siguientes vectores:
   a) $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
   b) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
   c) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$
   d) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

   Solución. Dibuja un ortoedro o paralelepípedo rectangular (más prosaicamente caja de zapatos). El vector será la diagonal que lo atraviesa desde el origen de coordenadas hasta el vértice opuesto. Para dibujar el ortoedro vete dibujando sus caras, recuerda que las líneas tienen que ser siempre paralelas a los ejes. Apartado *a*) en la figura 2, apartado *b*) en la figura 3, apartado *c*) en la figura 4 y apartado *d*) en la figura 5

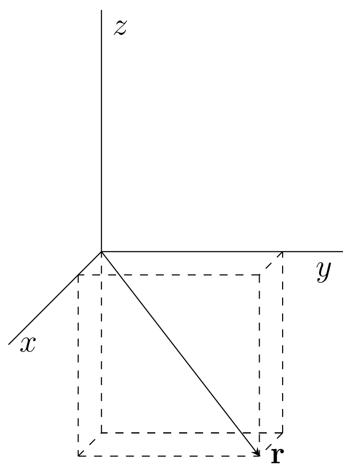

Figura 2: $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

2. Las coordenadas polares de posición de un cuerpo con respecto a un punto de referencia son $r = 10$ m y $\theta = 30^{o}$. Determina el vector de posición del cuerpo con respecto a dicho punto.

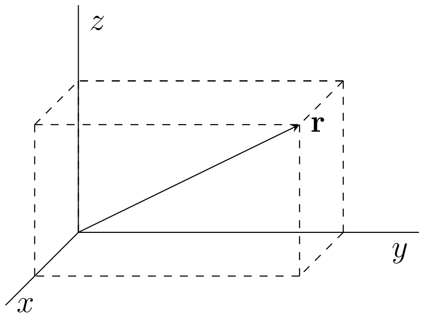

Figura 3: $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

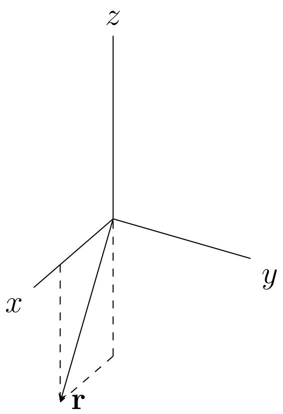

Figura 4: $c)$ $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

Solución. Como vemos en la figura 6, x es el cateto contiguo e y el cateto opuesto. Por la definición de seno y coseno tenemos:

$$\operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cdot \operatorname{sen} 30^{\circ} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ m}$$

$$\cos 30^{\circ} = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot \cos 30^{\circ} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} = 8,7 \text{ m}$$

Por lo que el vector de posición en coordenadas rectangulares es $\mathbf{r} = 8,7\,\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ m.

3. El vector de posición de un cuerpo con respecto a un punto de referencia es: $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ m. Determina sus coordenadas polares.

   Solución. Necesitamos saber el módulo del vector y el ángulo que forma con el eje X (ver la figura 6). El módulo es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5,8 \text{ m}$$

   El ángulo lo averiguamos por trigonometría. El seno de un ángulo es el cateto opuesto dividido entre la hipotenusa:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{h}$$

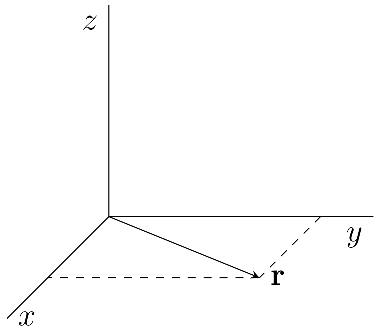

Figura 5: d) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

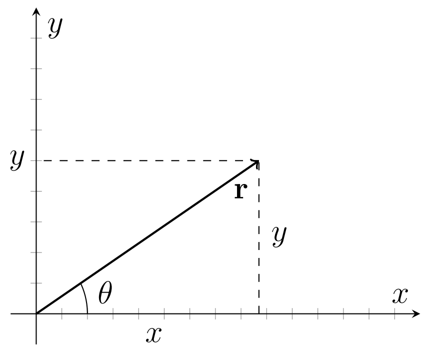

Figura 6: Coordenadas polares y rectangulares

el coseno es el cateto contiguo dividido entre la hipotenusa:

$$\cos\theta = \frac{x}{h}$$

y la tangente es el seno dividido entre el coseno:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{h}}{\frac{x}{h}} = \frac{y}{x}$$

Por tanto:

$$\tan\theta = \frac{5}{3}$$

$$\theta = \arctan\frac{5}{3}$$

$$\theta = 59^{\text{o}}$$

Las coordenadas polares del vector son $r = 5,8$ m y $\theta = 59^{\text{o}}$.

4. Deduce la ecuación de la trayectoria de los siguientes movimientos:
   a) $\mathbf{r} = t\,\mathbf{i}$
   b) $\mathbf{r} = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}$

   Solución. a) Tenemos que despejar el tiempo de la ecuación de la posición. Sabemos que:

$$x = t \qquad y = 0$$

De tan sencilla que es la ecuación no es fácil despejar el tiempo. Si dibujamos el vector $\mathbf{r}$ conforme pasa el tiempo vemos que se encuentra en el eje X y la función que nos representa dicho movimiento es $y = 0$ por lo que esa es la ecuación de la trayectoria. *b*) En este caso tenemos que $x = t$ e $y = t$ así que:

$$y = x$$

por lo que la ecuación de la trayectoria es la recta $y = x$ como podemos comprobar si dibujamos el vector $\mathbf{r}$ conforme pasa el tiempo.

5. ¿Podría ser mayor el desplazamiento que el espacio recorrido?

   Solución. No, porque el desplazamiento siempre es menor o igual que el espacio recorrido debido a que el desplazamiento es la línea recta que une el punto inicial y final y el espacio recorrido es el espacio realmente recorrido y si la trayectoria es curva, no coinciden, como se ve en la figura 7.

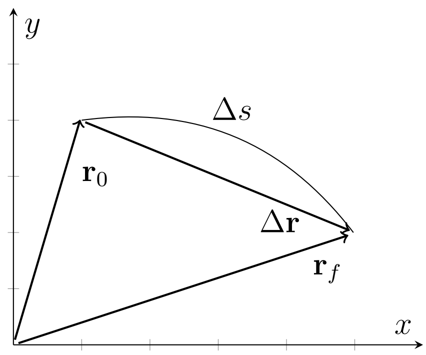

Figura 7: Desplazamiento y espacio recorrido

6. ¿Pueden ser equivalentes el espacio recorrido y el desplazamiento? ¿En qué caso?

   Solución. Sí, en un movimiento rectilíneo y en el que no haya retroceso.

7. ¿Crees que un cuerpo podría haber recorrido un espacio si el desplazamiento es cero?

   Solución. Sí, si el cuerpo vuelve al punto de origen. Por ejemplo, un cuerpo que describa una circunferencia habrá recorrido una distancia $2\pi r$ pero el desplazamiento será cero.

8. Dos cuerpos A y B se mueven en la dirección X según las ecuaciones $x_{\mathrm{A}} = 8t$ y $x_{\mathrm{B}} = 1,5t^2$. *a*) Representa en una misma gráfica las posiciones de A y de B desde $t = 0$ hasta $t = 5$ s. *b*) ¿Quién llega antes a los 100 m? *c*) ¿Al cabo de cuánto tiempo se encuentran los dos en la misma posición? *d*) ¿Quién alcanza antes los 300 m? *e*) ¿Qué diferencias encuentras entre el movimiento de A y el de B?

   Solución. La variable independiente es el tiempo y la dependiente la posición x. La gráfica del cuerpo A es una recta por lo que con representar dos puntos ya la podemos dibujar. La gráfica del cuerpo B es una parábola y tenemos que dibujar más puntos (como se ve en el cuadro 8). *a*) Dibujamos aproximadamente las gráficas

x_A	x_B	t
0	0	0
8	1,5	1
16	6	2
24	13,5	3
32	24	4
40	37,5	5

Cuadro 1:

como se en la figura 8. Dibujamos a diferente escala los ejes para que no ocupe tanto espacio.*b*) Despejamos el tiempo en las ecuaciones de posición:

$$t_A = \frac{100}{8} = 12,5 \text{ s}$$

$$t_B = \sqrt{\frac{100}{1,5}} = 8,2 \text{ s}$$

por lo que llega antes el cuerpo B. *c*) Para que se encuentren en la misma posición x tiene que ser la misma en ambas ecuaciones por lo que las igualamos:

$$8t = 1,5t^2$$

$$1,5t^2 - 8t = 0$$

$$(1,5t - 8)t = 0$$

$$t = 0 \qquad t = \frac{8}{1,5} = 5,3 \text{ s}$$

y vemos que se encuentran en el mismo punto al principio del movimiento y después de 5,3 segundos. *d*) Ídem a apartado *b*). *e*) Que en A, la posicion cambia siempre igual pero en B cada vez recorre más distancia para el mismo tiempo.

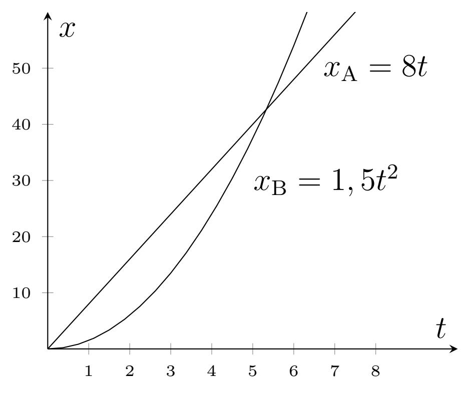

Figura 8:

9. Un cuerpo se mueve en una dirección determinada según la ecuación de posición $\mathbf{r} = (4t^3 - t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ m. *a*) Calcula su velocidad media en los diez primeros segundos. *b*) Calcula su velocidad instantánea en $t = 5$ s y en $t = 10$ s.

Solución. a) Aplicamos la definición de velocidad media:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_{\mathrm{f}} - \mathbf{r}_0}{\Delta t} = \frac{(4 \cdot 10^3 - 10)\mathbf{i} + 3 \cdot 10^2 \mathbf{j} - 0}{10} = 399\mathbf{i} + 30\mathbf{j} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) Derivamos:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (12 \cdot t^2 - 1)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$$

y sustituimos:

$$\mathbf{v}(5) = (12 \cdot 5^2 - 1)\mathbf{i} + 6 \cdot 5\mathbf{j} = 299\mathbf{i} + 30\mathbf{j} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\mathbf{v}(10) = (12 \cdot 10^2 - 1)\mathbf{i} + 6 \cdot 10\mathbf{j} = 1199\mathbf{i} + 60\mathbf{j} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

10. ¿Existe algún movimiento en el que la velocidad media y la instantánea sean iguales en todo momento? Si fuera así, di cuál.

    Solución. Un MRU porque en él la velocidad es constante.

11. Un cuerpo se mueve según la ecuación $\mathbf{r} = (2t^2 + 5t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - 5t\,\mathbf{k}$ m. Escribe la ecuación de su velocidad instantánea en función del tiempo; después expresa dicha velocidad en $t = 2$ s y halla su valor en dicho instante.

    Solución. La velocidad instantánea es:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (4t + 5)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \ \mathrm{m/s}$$

y para $t = 2$ la expresión es:

$$\mathbf{v}(2) = (4 \cdot 2 + 5)\mathbf{i} + 3 \cdot 2^2\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = 13\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \ \mathrm{m/s}$$

El valor se refiere al módulo:

$$v = \sqrt{v_{\mathrm{x}}^2 + v_{\mathrm{y}}^2 + v_{\mathrm{z}}^2} = \sqrt{13^2 + 12^2 + 5^2} = \sqrt{169 + 144 + 25} = 18,4 \ \mathrm{m/s}$$

12. Determina la aceleración instantánea y la aceleración en $t = 3$ s de un cuerpo, si su ecuación de posición —en una dirección— es: $x = 2t + 3t^2$ m.

    Solución. Para obtener la aceleración instantánea derivamos dos veces:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 + 6t \ \mathrm{m/s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 6 \ \mathrm{m/s}^2$$

y al ser constante, a $t = 3$ s vale 6 m/s^2.

13. La posición de un cuerpo viene determinada por la ecuación: $\mathbf{r} = -3t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}$ m. a) Determina las componentes de su aceleración. ¿Es esta constante? b) Calcula el valor de la aceleración a los 2 s.

    Solución. a) Derivamos dos veces:

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} = -6t\mathbf{i} + 6t^2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \ \mathrm{m/s}$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -6\mathbf{i} + 12t\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

y vemos que la aceleración no es constante. *b*) Sustituimos $t = 2$:

$$\mathbf{a} = -6\mathbf{i} + 12 \cdot 2\mathbf{j} = -6\mathbf{i} + 24\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

y el módulo vale:

$$a = \sqrt{a_\mathrm{x} + a_\mathrm{y}} = \sqrt{(-6)^2 + 24^2} = 24,7 \text{ m/s}^2$$

14. Un cuerpo describe un cuarto de circunferencia de radio 5 m partiendo en el instante $t = 0$. Determina, considerando el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia: *a*) El vector desplazamiento correspondiente al movimiento. *b*) El módulo de dicho desplazamiento. *c*) El espacio recorrido. ¿Coincide con el apartado *b*)? ¿Por qué? *d*) Repite los tres apartados anteriores si el cuerpo describe media circunferencia.

Solución. *a*) En la figura 9 se muestran los vectores. Matemáticamente:

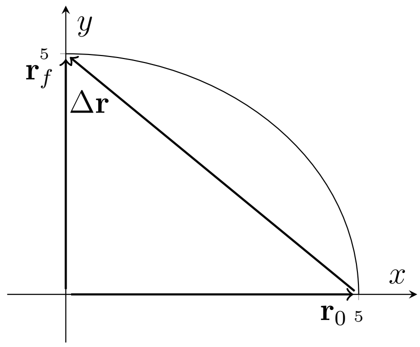

Figura 9:

$$\mathbf{r}_0 = 5\mathbf{i} + 0\mathbf{j} \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_\mathrm{f} = 0\mathbf{i} + 5\mathbf{j} \text{ m}$$

$$\Delta\mathbf{r} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} \text{ m}$$

b) $\Delta r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 7,1$ m *c*) Recorre la cuarta parte de la longitud de la circunferencia:

$$\Delta s = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi \cdot 5}{4} = 7,8 \text{ m}$$

y no coincide, es mayor que el módulo del desplazamiento.

15. Explica qué tipo de movimiento describiría un cuerpo si: *a*) $\mathbf{a}_\mathrm{t}$ es constante y $\mathbf{a}_\mathrm{c}$ es cero. *b*) $\mathbf{a}_\mathrm{c}$ es constante y $\mathbf{a}_\mathrm{t}$ es cero. *c*) Ambas son cero.

Solución. *a*) Como la aceleración centrípeta es cero la trayectoria es recta y como la aceleración tangencial es constante es un MRUA. *b*) Como la aceleración centrípeta es constante la trayectoria es una circunferencia y como la aceleración tangencial es cero es un MCU. *c*) Un MRU o se encuentra en reposo.

16. ¿Puede cambiar el sentido de la velocidad de un cuerpo si su aceleración es constante?

    Solución. Sí, si inicialmente el vector aceleración tiene sentido contrario al vector velocidad. De esta manera el cuerpo irá frenando hasta que cambie de sentido y ya nunca más volverá a cambiar de sentido.

17. ¿Puede un cuerpo aumentar su velocidad si su aceleración disminuye?

    Solución. Sí, si el vector aceleración tiene el mismo sentido que el vector velocidad, aunque conforme disminuye la aceleración la velocidad aumentará más despacio.

18. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones se corresponden con la de un cuerpo que se desplaza en una única dirección con aceleración constante? Razona tu respuesta. *a*) $\mathbf{r} = \sqrt{2}t^2\mathbf{j}$. *b*) $x = -4t^3 + t$. *c*) $\mathbf{r} = 3t^2\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$. *d*) $y = 2t - 4t^2$.

    Solución. Observando el vector de posición vemos que todos los cuerpos se desplazan en una dirección. Derivando dos veces para obtener la aceleración vemos que el *a*), *c*) y el *d*) cumplen con las condiciones pedidas.

19. Dado el vector velocidad $\mathbf{v} = 3t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$ calcula: *a*) La aceleración tangencial. *b*) La aceleración normal. *c*) El radio de curvatura.

    Solución. *a*) Obtenemos el módulo del vector velocidad:

    $$v = \sqrt{v_{\mathrm{x}}^2 + v_{\mathrm{y}}^2} = \sqrt{9t^2 + 16t^2} = \sqrt{25t^2} = 5t \text{ m/s}$$

    y aplicamos la definición de aceleración tangencial:

    $$a_{\mathrm{t}} = \frac{dv}{dt} = 5 \text{ m/s}^2$$

    b) Para los apartados *b*) y *c*) nos hace falta el radio de curvatura. Probemos a obtener el vector aceleración:

    $$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

    y su módulo:

    $$a = \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ m/s}^2$$

    Como el vector aceleración en sus componente intrínsecas es:

    $$\mathbf{a} = a_{\mathrm{t}}\mathbf{u}_{\mathrm{t}} + a_{\mathrm{n}}\mathbf{u}_{\mathrm{n}}$$

    vemos que la componente normal tiene que ser cero y como:

    $$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{r}$$

    deducimos que el radio es infinito, que significa que la trayectoria es recta.

20. Un cuerpo se mueve describiendo círculos de radio r con valor de velocidad v. Al cabo de cierto tiempo, se observa que tanto el valor de la velocidad como el radio se han duplicado. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones: a) Su aceleración centrípeta no ha cambiado. b) Su aceleración centrípeta se ha duplicado. c) Su aceleración centrípeta disminuye a la mitad.

    Solución. Inicialmente la aceleración centrípeta es:

$$a_{\mathrm{c}} = \frac{v^2}{r}$$

    Denotemos a las magnitudes que cambian con una prima:

$$a'_{\mathrm{c}} = \frac{v'^2}{r'}$$

    Nos dicen que $v' = 2v$ y $r' = 2r$, así que sustituimos en la ecuación:

$$a'_{\mathrm{c}} = \frac{v'^2}{r'} = \frac{(2v)^2}{2r} = \frac{4v^2}{2r} = \frac{2v^2}{r} = 2a_{\mathrm{c}}$$

    por lo que el único apartado cierto es el b).

21. La ecuación de posición de un móvil viene dada por $\mathbf{r} = 4t^2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ m. Razona y calcula: a) ¿En qué dirección se mueve? b) ¿Cuánto se ha desplazado en los 10 primeros segundos? c) ¿Cuál ha sido su velocidad media en esos 10 s? d) ¿Qué velocidad lleva a los 10 s? e) ¿Cuánto vale su aceleración? ¿Qué tipo de movimiento lleva?

    Solución. a) Solo varía con el tiempo la componente x del vector de posición por lo que se mueve en la dirección del eje X en el sentido creciente como se muestra en la figura 10. b) Calculamos el vector desplazamiento:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{f}} - \mathbf{r}_0 = 4 \cdot 10^2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} - 4 \cdot 0\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = 4 \cdot 10^2\mathbf{i} \text{ m}$$

    y su módulo: $\Delta r = \sqrt{(4 \cdot 10^2)^2} = 400$ m c) El vector velocidad media:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 10^2\mathbf{i}}{10} = 40\mathbf{i} \text{ m/s}$$

    y su módulo $v_{\mathrm{m}} = 40$ m/s. d) Ahora nos preguntan por la velocidad instantánea a los 10 s:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 8t\mathbf{i} = 8 \cdot 10\mathbf{i} = 80\mathbf{i} \text{ m/s}$$

    e) La aceleración es:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 8\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

    Vimos en el apartado a) que el movimiento es rectilíneo y como la aceleración es constante y en la misma dirección y sentido que el movimiento, se trata de un MRUA.

CINEMÁTICA II

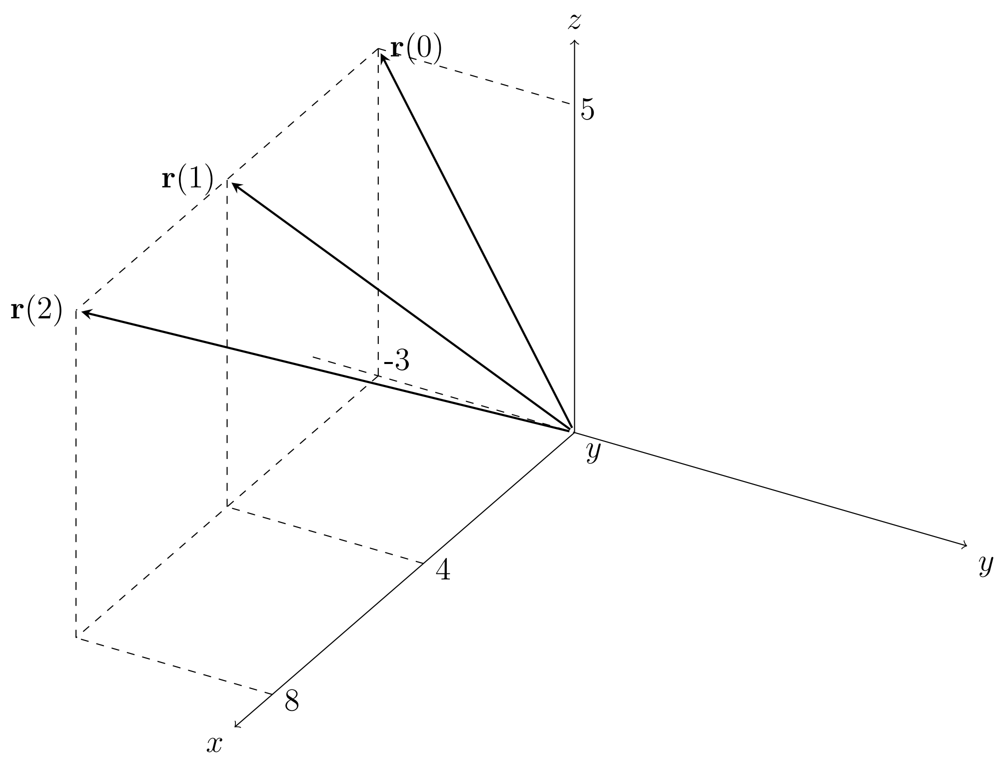

Figura 10:

1. La ecuación de posición de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta viene dada por la expresión $x = 80 - 3t^2$ m. *a*) Determina sus ecuaciones de velocidad y aceleración en función del tiempo. ¿Qué significado tienen los signos de la velocidad y la aceleración? *b*) Calcula, en intervalos de 1 s y durante los tres primeros segundos, los valores de su posición y velocidad. *c*) Representa, en el intervalo indicado, las gráficas x-t, v-t y a-t.

   Solución. *a*) Derivando respecto al tiempo obtenemos $v = -6t$ y $a = -6$. En la velocidad el signo menos significa que se desplaza hacia el sentido decreciente del eje X. En la aceleración, como su signo coincide con el de la velocidad, significa que la velocidad aumenta y que cada vez es más negativa. *b*) Véase el cuadro 2. *c*) Para que la gráfica $x - t$ no sea muy grande es conveniente dibujar los ejes a diferente escala, pero teniendo presente que la gráfica estará deformada. Sabiendo que es una parábola (puesto que la variable independiente t está elevada al cuadrado) invertida y centrada en el eje Y resulta más fácil dibujarla (figura 15). La gráfica $v - t$ es una recta (puesto que la variable independiente está elevada a uno) por lo que con dibujar dos puntos tenemos suficiente (figura 12). La aceleración es constante por lo que es una recta horizontal (figura 13).

2. Un cuerpo se desplaza a lo largo de una recta con una aceleración constante de $+0,8$ m/s^2. Determina la ecuación de velocidad en función del tiempo si partió con una velocidad inicial de -2 m/s. Representa su gráfica v-t. ¿En qué instante se hace cero su velocidad? ¿Vuelve a ser cero en algún otro instante?

   Solución. Como la aceleración es constante nos encontramos en un MRUA y la

x	v	t
80	0	0
77	-6	1
68	-12	2
53	-18	3

Cuadro 2:

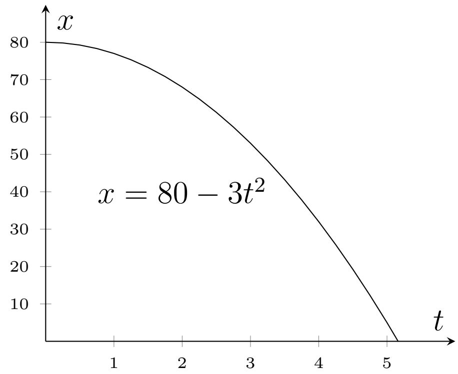

Figura 11:

ecuación de la velocidad es:

$$v = v_0 + at$$

$$v = -2 + 0,8t$$

Como la relación entre v y t es lineal (la variable independiente t está elevada a la unidad) la gráfica es una recta y con representar dos puntos ya la podemos dibujar. Representamos los puntos más sencillos: $v(0) = 0$ y $v(1) = -1,2$. Su gráfica está en la figura 14. Imponemos la condición a la ecuación de la velocidad:

$$0 = -2 + 0,8t$$

$$t = \frac{2}{0,8} = 2,5 \text{ s}$$

El cuerpo disminuye su velocidad por efecto de la aceleración hasta que invierte el sentido y continúa acelerando sin fin, por tanto nunca volverá a tener velocidad cero.

3. ¿Qué representa la pendiente de la gráfica x-t del movimiento rectilíneo uniforme? Representa las ecuaciones de posición $x = 3t$ y $x = 3 + 4t$ y compáralas.

   Solución. En un MRU la ecuación de posición es $x = x_0 + vt$ por lo que la pendiente de la gráfica $x - t$ es la velocidad. Están representadas en la figura 15. La primera tiene menor velocidad y la segunda comienza el movimiento del cuerpo en la posición $x = 3$.

4. Las ecuaciones de movimiento de dos móviles A y B son $x_{\text{A}} = 5t$ y $x_{\text{B}} = 140 - 2t$ —ambas en metros—. Determina: *a*) ¿Qué distancia les separa inicialmente? *b*) ¿En qué sentidos relativos se mueven uno respecto del otro? *c*) ¿En qué instante se cruzan? *d*) Representa el movimiento de ambos en una misma gráfica x-t.

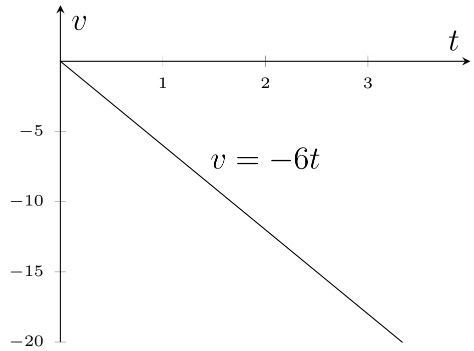

Figura 12:

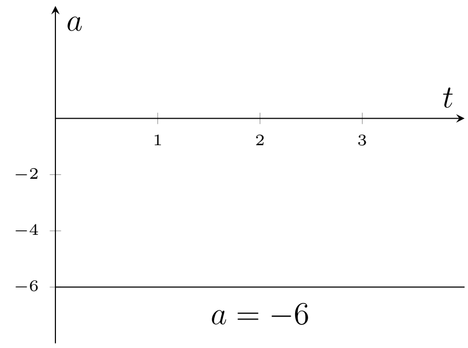

Figura 13:

Solución. *a*) En el instante inicial, se encuentran en: $x_{\mathrm{A}} = 0$ y $x_{\mathrm{B}} = 140$ m por lo que les separan 140 metros. *b*) Se mueven en sentido contrario uno respecto del otro, ya que $v_{\mathrm{A}} = 5$ m/s y $v_{\mathrm{B}} = -2$ m/s. *c*) Cuando se cruzan se cumple que $x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}}$, por lo que igualando:

$$5t = 140 - 27 \Rightarrow 7t = 140 \Rightarrow t = \frac{140}{7} = 20 \text{ s}$$

d) Véase la figura 16.

5. Dos vehículos A y B parten uno al encuentro de otro desde dos localidades que distan entre sí 400 km. El vehículo A viaja a 100 km/h, mientras que el B, que se pone en marcha un cuarto de hora después, lo hace a 120 km/h. *a*) Cuánto tiempo pasa desde que partió A hasta que se produce el encuentro? *b*) Qué distancia ha recorrido este vehículo?

   Solución. Elegimos el sistema de referencia. Para ello elegimos la posición del cero y los sentidos positivo y negativo. Lo más sencillo es colocar un cuerpo en el origen (véase la figura 17). No pasamos a SI porque parece que va a ser más sencillo de resolver. La ecuación del MRU es $s = s_0 + vt$ pero la ecuación más completa es $s = s_0 + v(t - t_0)$. Como habitualmente empezamos a estudiar el movimiento cuando el cronómetro marca cero t_0 suele valer cero y por eso no usamos la ecuación completa. Pero en este caso los cuerpos no empiezan el movimiento a la vez pero el tiempo tiene que ser único para ambos, por eso $t_{0\mathrm{B}} = 1/4$ hora. Por lo tanto las

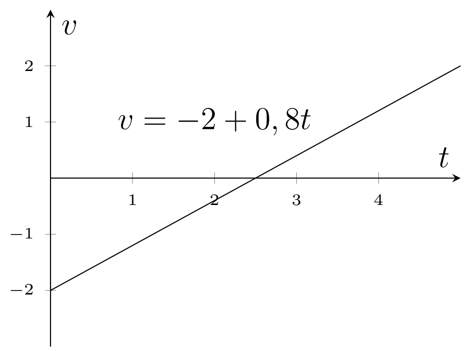

Figura 14:

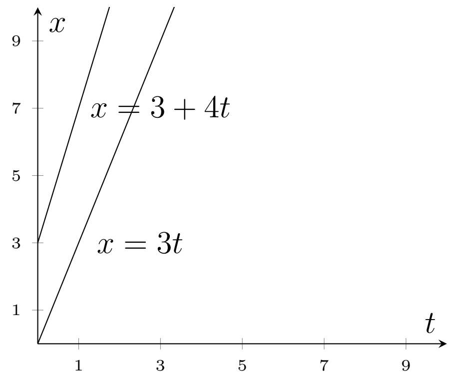

Figura 15:

ecuaciones del movimiento para cada cuerpo son:

$$s_{\mathrm{A}} = 100t \qquad s_{\mathrm{B}} = 400 - 120(t - 1/4)$$

Toda la información que podamos averiguar está en esas ecuaciones. *a*) Cuando se crucen se cumple que $s_{\mathrm{A}} = s_{\mathrm{B}}$ por lo que:

$$100t = 400 - 120(t - 1/4)$$

$$100t = 400 - 120t + 30$$

$$220t = 430 \Rightarrow t = \frac{43}{22} = 1,95 \text{ h}$$

b) Sustituimos el tiempo en la ecuación de A: $s_{\mathrm{A}} = 100 \cdot 1,95 = 195$ km.

6. La nave transbordadora Discovery lleva una velocidad de 720 km/h en el momento del aterrizaje. Cuando entra en contacto con el suelo, despliega los paracaídas de frenado, que junto con los propios frenos de la nave, hacen que esta se detenga en 20 s. *a*) ¿Cuál ha sido la aceleración, suponiéndola constante, de frenado? *b*) ¿Qué distancia ha recorrido la nave durante el frenado?

   Solución. Pasamos la velocidad al SI:

$$\frac{720 \text{ km}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 200 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

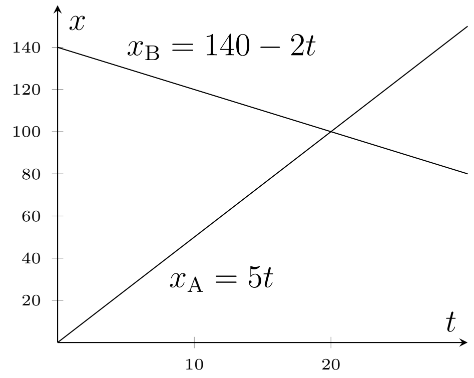

Figura 16:

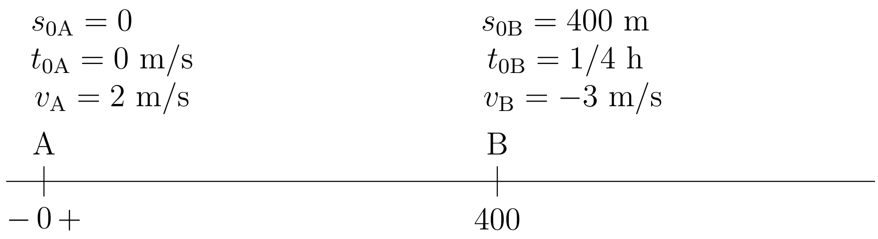

Figura 17:

a) Al ser la aceleración constante se trata de un MRUA. Escribimos la ecuación de la velocidad:

$$v = v_0 + at$$

sustituimos los valores (tarda 20 s en pararse):

$$0 = 720 + a \cdot 20$$

y despejamos la aceleración:

$$a = \frac{-200}{20} = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) Podemos usar la ecuación:

$$v^2 - v_0^2 = 2ae$$

$$0 - 200^2 = 2 \cdot (-10)e$$

$$e = \frac{-200^2}{-20} = 2000 \text{ m}$$

7. Un tiesto cae sobre un viandante desde el balcón de un quinto piso que está a 13 m. ¿De cuánto tiempo dispone la persona en cuestión para evitar el golpe, si su estatura es de 1,75 m?

   Solución. Elegimos el sistema de referencia como se muestra en la figura 18. Con ese sistema los valores iniciales son:

$$a = -9,8 \text{ m/s}^2 \quad s_0 = 13 \text{ m} \quad v_0 = 0$$

Como la aceleración es constante nos encontramos con un MRUA, escribimos sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} s = 13 - \frac{1}{2}9,8t^2 \\ v = -9,8t \end{array}\right\}$$

Con la ecuación de la posición nos basta para averiguar lo que nos piden. Le imponemos la condición de que la posición final valga 1,75 m y despejamos el tiempo:

$$1,75 = 13 - \frac{1}{2}9,8t^2$$

$$\frac{1}{2}9,8t^2 = 13 - 1,75$$

$$t = \sqrt{\frac{11,25 \cdot 2}{9,8}} = 1,52 \text{ s}$$

por lo que dispone de menos de 1,52 segundos.

Figura 18:

8. Un protón con una velocidad inicial de $2,3 \cdot 10^7$ m/s entra en una zona donde sufre una aceleración contraria constante de $1,3 \cdot 10^{15}$ m/s^2. ¿Qué distancia recorre hasta que se detiene?

   Solución. Es un MRUA y usamos la ecuación:

$$v^2 - v_0^2 = 2ae$$

$$0 - (2,3 \cdot 10^7)^2 = 2 \cdot (-1,3 \cdot 10^15) \cdot e$$

$$e = \frac{-5,29 \cdot 10^{-14}}{-2,6 \cdot 10^{15}} = 0,2 \text{ m}$$

   por lo que recorre 0,2 metros.

9. Una persona está a punto de perder su tren. En un desesperado intento, corre a una velocidad constante de 6 m/s. Cuando está a 32 m de la última puerta del vagón de cola, el tren arranca con una aceleración constante de 0,5 m/s^2. ¿Logrará nuestro viajero aprovechar su billete o lo habrá perdido, junto con su tiempo y su aliento, en un infructuoso intento?

Solución. Véase el sistema de referencia elegido en la figura 19. Tenemos dos movimientos: la persona un MRU y el tren un MRUA. Por tanto tenemos que escribir las ecuaciones para ambos movimientos. Empezamos a contar el tiempo cuando el tren arranca. Ecuación del MRU:

$$s = s_0 + vt \qquad\qquad s = 6t$$

Ecuaciones del MRUA:

$$\left.\begin{array}{l} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} s = 32 + \frac{1}{2}\cdot 0,5t^2 \\ v = 0,5t \end{array}\right\}$$

La persona podrá montar en el tren si las posiciones de ambos movimientos son iguales:

$$6t = 32 + \frac{1}{2}\cdot 0,5t^2$$

$$\frac{1}{4}t^2 - 6t + 32 = 0$$

Multiplicamos la ecuación por 4:

$$t^2 - 24t + 128 = 0$$

$$t = \frac{24 \pm \sqrt{576-512}}{2} = \frac{24 \pm 8}{2}$$

$$t_1 = 8 \text{ s} \qquad t_2 = 16 \text{ s}$$

por lo que dispone de dos ocasiones para montarse al tren. Si en la primera ocasión no monta, la persona adelanta al tren (la velocidad del tren a los 8 s son 4 m/s), pero como el tren sigue acelerando el segundo tiempo se corresponde a cuando el tren adelanta a la persona.

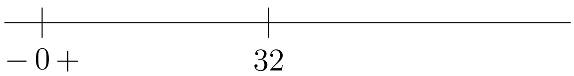

Figura 19:

10. Se lanzan en sentido vertical hacia arriba dos cuerpos de masa m y $3m$, respectivamente, con la misma velocidad inicial, v_0. Razona cómo son comparativamente sus alturas máximas y los tiempos que tardan en volver a caer.

    Solución. Son iguales porque la masa no influye en las ecuaciones del movimiento.

11. Desde igual altura y al mismo tiempo se lanzan dos objetos con idéntica velocidad inicial: uno hacia arriba y otro hacia abajo. Si el primero tarda 5 s más en llegar al suelo, ¿con qué velocidad fueron lanzados?

    Solución. Ambos movimientos son MRUA y consideramos como el sentido positivo el vertical hacia arriba por lo que la aceleración de la gravedad es negativa. Sabemos que el tiempo de subida y de bajada es el mismo, por lo tanto el primer cuerpo tarda

2,5 s en llegar al punto más alto y tener velocidad cero. Planteamos su ecuación de la velocidad:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ 0 &= v_0 - 9,8 \cdot 2,5 \\ v_0 &= 24,5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

por lo que los cuerpos son lanzados con una velocidad inicial de 24,5 m/s.

12. Una bola se deja caer desde 10 m de altura y tras rebotar en el suelo asciende hasta 6,5 m Determina con qué velocidad llega al suelo y con qué velocidad sale tras el primer rebote.

    Solución. Son dos movimientos distintos. Para el primero elegimos el cero a los 10 m de altura y el sentido positivo hacia abajo, obteniendo las ecuaciones del MRUA:

    $$\left.\begin{array}{l} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 \\ v = 9,8t \end{array}\right\}$$

    Calculamos el tiempo que tarda en llegar al suelo:

    $$10 = \frac{1}{2}9,8t^2$$

    $$t = \sqrt{\frac{20}{9,8}} = 1,4 \text{ s}$$

    y sustituimos en la ecuación de la velocidad:

    $$v = 9,8 \cdot 1,4 = 13,7 \text{ m/s}$$

    por lo que llega al suelo con 13,7 m/s. Para el segundo movimiento volvemos a plantear las ecuaciones:

    $$\left.\begin{array}{l} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v = v_0 + at \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} s = v_0 t - \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 \\ v = v_0 - 9,8t \end{array}\right\}$$

    Despejamos el tiempo que tarda en llegar al punto más alto (donde la velocidad se hace cero):

    $$\begin{aligned} 0 &= v_0 - 9,8t \\ t &= \frac{v_0}{9,8} = \end{aligned}$$

    y sustituimos en la ecuación de la posición, donde hemos sustituido la distancia que recorre hasta el punto más alto, 6,5 m:

    $$6,5 = v_0 \frac{v_0}{9,8} - \frac{1}{2}9,8\left(\frac{v_0}{9,8}\right)^2$$

    $$6,5 = \frac{v_0^2}{9,8} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{9,8}$$

$$6,5 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{9,8}$$

$$v_0 = \sqrt{6,5 \cdot 2 \cdot 9,8} = 11,3 \text{ m/s}$$

por lo que sale con 11,3 m/s tras el rebote. En este caso se pierde energía al chocar con el suelo, en concreto:

$$\frac{13,7 - 11,3}{13,7} \cdot 100 = 18\,\%$$

un 18 % de energía (aunque no lo pregunten en el enunciado).

13. Un individuo situado a 60 m sobre el suelo ve subir —y pasar por delante de él— un cuerpo lanzado desde abajo y 8 s después lo ve bajar, ¿con qué velocidad fue lanzado?

    Solución. Consideremos el sentido positivo el vertical hacia arriba. Estudiemos en primer lugar el movimiento desde que pasa por la ventana hasta que llega al punto más alto:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ 0 &= v_0 - 9,8 \cdot 4 \\ v_0 &= 9,8 \cdot 4 = 39,2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

    por lo que pasa por la ventana a 39,2 m/s. Ahora estudiemos el movimiento desde que es lanzado hasta que llega a la ventana. Como no nos dan el tiempo pero sí el espacio recorrido podemos usar:

$$v^2 - v_0^2 = 2ae$$

$$v_0^2 = v^2 - 2ae$$

$$v_0^2 = 39,2^2 - 2 \cdot (-9,8) \cdot 60 = 2712$$

$$v_0 = \sqrt{2712} = 52 \text{ m/s}$$

    por lo que fue lanzado con una velocidad de 52 m/s.

14. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s y 1 s después se lanza otro con la misma velocidad inicial. ¿A qué altura se cruzarán y cuánto tiempo habrá transcurrido en ese instante desde que se lanzó el primero?

    Solución. Consideremos el sentido positivo el vertical hacia arriba y coloquemos el cero en el punto de lanzamiento. Empezamos a contar el tiempo cuando se lanza el primer cuerpo por lo que el tiempo inicial para el segundo cuerpo es $t_0 = 1$ s. Planteamos las ecuaciones para el primer cuerpo:

$$\left.\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \\ v &= v_0 + at \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} s &= 20t - \tfrac{1}{2} \cdot 9,8t^2 \\ v &= 20 - 9,8t \end{aligned}\right\}$$

    y para el segundo:

$$\left.\begin{aligned} s &= s_0 + v_(t - t_0) + \tfrac{1}{2}(t - t_0)^2 \\ v &= v_0 + a(t - t_0) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} s &= 20(t-1) - \tfrac{1}{2} \cdot 9,8(t-1)^2 \\ v &= 20 - 9,8(t-1) \end{aligned}\right\}$$

Se cruzarán cuando sus posiciones sean iguales:

$$\begin{aligned}
20t - \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 &= 20(t-1) - \frac{1}{2} \cdot 9,8(t^2 + 1 - 2t) \\
20t - \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 &= 20t - 20 - \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 + 9,8t \\
9,8t &= 24,9 \\
t &= 2,5 \text{ s}
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación de la posición:

$$s = 20t - \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 = 20 \cdot 2,5 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 2,5^2 = 19,4 \text{ m}$$

por lo que se cruzarán a 19,4 m de altura habrán transcurrido 2,5 s.

15. Elimina el tiempo en las ecuaciones del MRUA para obtener una útil ecuación.

Solución. Las ecuaciones del MRUA son:

$$\left.\begin{array}{l} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v = v_0 + at \end{array}\right\}$$

y en ellas está toda la información que podemos conocer sobre el MRUA. Despejamos el tiempo en la ecuación de la velocidad:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

y sustituimos en la de la posición:

$$\begin{aligned}
s &= s_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} \\
s &= s_0 + \frac{v v_0 - v_0^2}{a} + \frac{v^2 + v_0^2 - 2 v v_0}{2a} \\
s &= s_0 + \frac{2 v v_0 - 2 v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2 v v_0}{2a} \\
s &= s_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}
\end{aligned}$$

si no hay retroceso, $s - s_0$ es el espacio recorrido e, luego:

$$e = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ae$$

que es la ecuación que nos piden y que nos evita tener que resolver el sistema de ecuaciones, como hemos hecho ahora, si nos dan todas menos una de las siguientes magnitudes v, v_0, a y e.

16. Deduce la ecuación del alcance máximo para un tiro horizontal.

    Solución. El alcance máximo se consigue cuando el objeto llega al suelo, por lo que se cumple que $y = 0$. Imponemos esa condición en la ecuación de la posición del movimiento vertical y despejamos el tiempo:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{1}{2}gt^2 = y_0$$

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

    y sustituimos en la ecuación de la posición del movimiento horizontal:

$$x = v_0 t$$

$$x_{\text{máx}} = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

    que es la ecuación pedida y vemos que el alcance es mayor cuanto mayor sean la velocidad inicial y la altura de lanzamiento.

17. Demuestra que la trayectoria de un tiro horizontal es una parábola.

    Solución. Tenemos las ecuaciones de posición para el movimiento horizontal y vertical:

$$x = v_0 t \qquad y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

    y vemos que dependen del tiempo. Para obtener la ecuación de la trayectoria debemos eliminar el tiempo en ambas ecuaciones, para ello despejamos el tiempo en la primera ecuación:

$$t = \frac{x}{v_0}$$

    y sustituimos en la segunda:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}$$

    y comparando con la ecuación general de una parábola: $y = ax^2 + bx + c$ vemos que la trayectoria es una parábola con el vértice en el punto lanzamiento y las ramas hacia abajo (la rama izquierda no tiene sentido físico porque se corresponde con tiempo negativo).

18. Deduce la altura y el alcance máximo para un tiro parabólico desde el suelo.

    Solución. La altura máxima ocurre cuando la velocidad del movimiento vertical es cero:

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt$$

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt$$

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

y sustituimos en la ecuación de la posición del movimiento vertical (nos dicen que se lanza desde el suelo por lo que $y_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
y &= y_0 + v_0 \operatorname{sen} \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \\
y_{\text{máx}} &= v_0 \operatorname{sen} \alpha \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g^2} \\
y_{\text{máx}} &= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g} \\
y_{\text{máx}} &= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}
\end{aligned}$$

El alcance máximo se alcanza cuando $y = 0$, imponemos la condición en la ecuación de posición del movimiento vertical:

$$0 = v_0 \operatorname{sen} \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

y despejamos el tiempo:

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 \operatorname{sen} \alpha t = 0$$

sacamos factor común:

$$\left(\frac{1}{2} g t - v_0 \operatorname{sen} \alpha \right) t = 0$$

y obtenemos las dos soluciones:

$$t = 0 \qquad t = \frac{2 v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

Sustituimos en la ecuación de posición del movimiento horizontal:

$$\begin{aligned}
x &= v_0 \cos \alpha \, t \\
x_{\text{máx}} &= v_0 \cos \alpha \, \frac{2 v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \\
x_{\text{máx}} &= \frac{v_0^2 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}
\end{aligned}$$

y usamos la fórmula del ángulo doble:

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$$

para dejar la ecuación más compacta:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

19. Demuestra que en un tiro parabólico desde el suelo el cuerpo regresa al suelo con la misma velocidad con la que fue lanzado

    Solución. Hemos visto en otro ejercicio que el tiempo que tarda en llegar al suelo es:
$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$$
    Sustiuimos en la ecuación de la velocidad del movimiento vertical:
$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt \\ v_y &= v_0 \operatorname{sen}\alpha - g \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \\ v_y &= -v_0 \operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$
    El vector velocidad es:
$$\mathbf{v} = v_0 \cos\alpha \mathbf{i} - v_0 \operatorname{sen}\alpha \mathbf{j}$$
    y su módulo es:
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha} \\ v &= \sqrt{v_0^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)} \\ v &= v_0 \end{aligned}$$
    como queríamos demostrar.

20. ¿Con qué ángulo de despegue se consigue el mayor alcance en un movimiento parabólico si los demás factores se mantienen iguales?

    Solución. El alcance máximo es:
$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$
    y el mayor alcance se consigue si:
$$\operatorname{sen} 2\alpha = 1$$
    despejamos el ángulo:
$$2\alpha = \operatorname{arc\,sen} 1$$
$$2\alpha = 90^{\circ}$$
$$\alpha = 45^{\circ}$$
    por lo que el ángulo más eficiente es el de 45º. Con ángulos complementarios (que sumen 90º) se consigue el mismo alcance (compruébalo) aunque en la realidad y debido al rozamiento el pequeño tiene más alcance.

21. ¿Qué velocidad comunica la pértiga a un saltador que bate una marca de 6,04 m si el ángulo de despegue es de 82º?

Solución. La ecuación de la altura máxima (la dedujimos en un ejercicio anterior) es:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

y despejamos la velocidad:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gy_{\text{máx}}}{\operatorname{sen}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 6,05}{\operatorname{sen}^2 82^{\text{o}}}} = 11,0 \text{ m/s}$$

22. Un intrépido motorista pretende saltar una fila de camiones dispuestos a lo largo de 45 m. La rampa de despegue es de 20º y pretende aterrizar en otra rampa similar de la misma altura. Si en el momento del despegue su velocímetro marcaba 90 km/h, ¿cuál es el futuro inmediato de nuestro intrépido héroe: la gloria o el hospital?

    Solución. El alcance máximo lo hemos deducido en un ejercicio anterior:

    $$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

    Sustituimos los valores para el motorista (90 km/h=25 m/s):

    $$x_{\text{máx}} = \frac{25^2 \operatorname{sen} 2 \cdot 20^{\text{o}}}{9,8} = 40,99 \text{ m}$$

    y como es menor de 45 m el motorista acaba en el hospital.

23. Un objeto de 5 kg de masa se deja caer desde cierta altura. A la vez, y desde la misma altura, otros dos objetos, uno de 3 kg y otro de 10 kg, son lanzados en sentido horizontal con velocidades de 5 y 15 m/s, respectivamente. ¿Sabrías ordenar los cuerpos por orden de llegada al suelo?

    Solución. La masa no influye puesto que no está en las ecuaciones del movimiento. Las ecuaciones para el movimiento vertical son iguales para los tres cuerpos por lo que los tres llegan a la vez al suelo.

24. Desde un avión que vuela horizontalmente con una velocidad v se lanza un objeto hacia atrás con una velocidad horizontal v respecto al avión. Explica el movimiento de dicho objeto visto por un observador que viaje en el avión y por otro que se halle en reposo en tierra.

    Solución. El observador del avión verá salir el cuerpo con velocidad v pero el observador terrestre verá que el cuerpo tiene velocidad cero.

25. ¿Con qué ángulo deberíamos saltar para que la altura y el alcance fuesen iguales?

    Solución. Igualamos las ecuaciones de la altura y el alcance máximos:

    $$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \qquad y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

    $$\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

$$\frac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{2g}$$
$$4\cos\alpha = \text{sen}\,\alpha$$
$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 4$$
$$\text{tg}\,\alpha = 4$$
$$\alpha = \text{arc}\,\text{tg}\,4 = 76,0^{\text{o}}$$

26. ¿En qué punto de una trayectoria parabólica es menor la velocidad?

    Solución. La velocidad horizontal es constante y la vertical se hace cero en el punto más alto, por lo que ese es el punto en el que es menor la velocidad.

27. Un niño sentado en un vagón de tren que viaja a velocidad constante lanza hacia arriba una pelota. ¿Cuál de las siguientes tres escenas tendrá lugar? *a*) La pelota cae sobre los ocupantes del asiento de delante? *b*) Golpea en el periódico del viajero de atrás. *c*) La pelota vuelve a caer en las manos del pequeño, para alivio de los demás pasajeros. ¿Qué ocurriría si el tren en vez de llevar velocidad constante frena en el instante del lanzamiento? ¿O si acelera? ¿O si gira a la derecha?

    Solución. Ocurrirá el apartado *c*) puesto que la pelota tiene la misma velocidad hoizontal que el tren y debido a esa inercia vuelve a caer en el mismo sitio del que salió. Por el contrario si el tren frena la pelota caerá sobre el asiento delantero, si acelera sobre el trasero y si gira a la derecha la pelota cae a la izquierda.

28. ¿Cómo podríamos calcular, sirviéndonos de una regla, la velocidad de caída vertical de las gotas de lluvia por el trazo oblicuo que dejan en las ventanillas laterales de un vehículo que se mueve con velocidad conocida. Dato: en la atmósfera la caída libre tiene una velocidad límite debido al rozamiento por lo tanto considera que el movimiento vertical es MRU.

    Solución. Supongamos que el vehículo se desplaza hacia la izquierda. La gota cae vertical pero el ocupante observará la trayectoria que se muestra en la figura 20. El ocupante está quieto en el vehículo y él percibe que la gota se mueve hacia la derecha. Podemos descomponer el movimiento como dos movimientos MRU, uno vertical y otro horizontal:

    $$y = v_y t$$
    $$x = v_x t$$

    Dividiendo una entre la otra:

    $$\frac{y}{x} = \frac{v_y}{v_x}$$

    por lo que la relación entre las distancias es igual que la relación entre las velocidades. Las distancias las medimos con la regla y v_x la miramos en el velocímetro del vehículo por lo que la velocidad de caida es:

    $$v_y = \frac{y}{x} v_x$$

    Las distancias podemos dejarlas en las unidades que queramos, puesto que se simplifican, y la velocidad la obtendremos en las unidades en la que pongamos v_x.

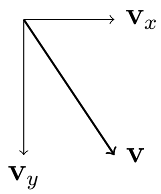

Figura 20:

29. Sabiendo que la Luna completa su órbita alrededor de la Tierra en 27,32 días (periodo sidéreo) y que su distancia media es de 384000 km, ¿cuál es la aceleración centrípeta que actúa sobre la órbita de este satélite?

    Solución. La aceleración centrípeta es:

    $$a_{\mathrm{c}} = \omega^2 r$$

    La velocidad angular es:

    $$\omega = \frac{\theta}{t}$$

    Al dar una vuelta completa se recorre ángulo de 2π radianes y se tarda un periodo, por lo que:

    $$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

    por lo que podemos escribir:

    $$a_{\mathrm{c}} = \omega^2 r = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \cdot r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

    y sustituyendo por los valores en unidades SI:

    $$a_{\mathrm{c}} = \frac{4\pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(27,32 \cdot 86400)^2} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

    El periodo sidéreo es el tiempo que tarda la Luna en volver a la misma posición respecto a la Tierra y el periodo sinódico es el tiempo que tarda en volver a la misma posición respecto a la Tierra y el Sol o lo que es lo mismo el tiempo que tarda entre fases lunares. Este último es el que nos marca el calendario porque es el que vemos a simple vista. El periodo sinódico son 29,5 días (compruébalo contando los días en un calendario que te indique las fases lunares). Como vemos, decir que el periodo de la Luna son 28 días es un error.

30. La Tierra completa una vuelta alrededor del Sol en 365 días. Si la distancia media al Sol es de 149600000 km, calcula la velocidad angular orbital de la Tierra y su velocidad lineal.

    Solución. La velocidad angular es:

    $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365 \cdot 86400} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

    y la velocidad lineal:

    $$v = \omega r = 2,0 \cdot 10^{-7} \cdot 1,496 \cdot 10^{11} = 29806 \text{ m/s} \approx 30000 \text{ km/s} \approx 108000 \text{ km/h}$$

    así que nos desplazamos alrededor del Sol a 108000 km/h y ni nos damos cuenta.

31. ¿Tienen todos los puntos de un disco que gira la misma velocidad angular? ¿Y lineal?

    Solución. Tienen todos la misma velocidad angular y la lineal depende de la distancia al centro de giro conforme a la ecuación $v = \omega r$, por lo que cuanto más lejos del centro más velocidad lineal llevan.

32. Si la velocidad angular de un cuerpo se triplica, ¿qué le ocurrirá a su aceleración centrípeta?

    Solución. La aceleración centrípeta es:

    $$a_{\mathrm{c}} = \omega^2 r$$

    Llamemos con prima a las nuevas magnitudes:

    $$a'_{\mathrm{c}} = \omega'^2 r$$

    Si se triplica la velocidad angular:

    $$\omega' = 3\omega$$

    y sustituyendo:

    $$a'_{\mathrm{c}} = 9\omega^2 r = 9a_{\mathrm{c}}$$

    así que la aceleración centrípeta se multiplica por 9.

33. Las ruedas traseras de un tractor son de mayor radio que las delanteras. Cuando el tractor está en movimiento, ¿qué ruedas tienen mayor velocidad lineal? ¿Y mayor velocidad angular? ¿Y mayor periodo? ¿Y mayor frecuencia? ¿Y cuánto es dos más dos?

    Solución. Ambas ruedas tienen la misma velocidad lineal porque sino derraparían, por lo tanto:

    $$v_1 = v_2$$

    $$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

    $$\text{si} \quad r_1 > r_2 \Rightarrow \omega_1 < \omega_2$$

    por lo que las ruedas grandes tienen menor velocidad angular. Como el periodo es:

    $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

    las ruedas grandes tienen más periodo y como la frecuencia es el inverso del periodo tienen menos frecuencia.

34. Un tractor tiene unas ruedas delanteras de 30 cm de radio, mientras que el radio de las traseras es de 1 m. ¿Cuántas vueltas habrán dado las ruedas traseras cuando las delanteras hayan completado 15 vueltas?

    Solución. Sabemos que la velocidad lineal es la misma para ambas ruedas (el subíndice 1 es para las ruedas grandes):

    $$v_1 = v_2$$

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$
$$\frac{\theta_1}{t} r_1 = \frac{\theta_2}{t} r_2$$

como el tiempo transcurrido es el mismo:

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$$
$$\theta_1 = \theta_2 \frac{r_2}{r_1}$$
$$\theta_1 = 15 \cdot \frac{0,3}{1} = 4,5 \text{ vueltas}$$

así que las ruedas traseras habrán completado cuatro vueltas y media.

35. Por la periferia de una pista circular parten a la vez, del mismo punto y en direcciones opuestas, dos móviles con velocidades de 4 rpm y 1,5 rpm, respectivamente. ¿En qué punto se encontrarán y qué tiempo habrá transcurrido?

    Solución. Primero pasamos la velocidad al SI:

    $$\frac{4 \text{ revoluciones}}{1 \text{ minuto}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev.}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0,42 \text{ rad/s} \qquad \text{y } 1,5 \text{ rpm} = 0,16 \text{ rad/s}$$

    Como la velocidad angular es constante se trata de dos movimientos MCU y la ecuación de posición es $\theta = \theta_0 + \omega t$. Uno lleva el sentido horario y otro el antihorario y la posición angular inicial para uno de los objetos tiene que ser $\theta_2 = 2\pi$, no pueden tener ambos posición angular cero porque entonces no obtendremos ninguna solución:

    $$\theta_1 = 0,42t$$
    $$\theta_2 = 2\pi - 0,16t$$

    se encuentran cuando $\theta_1 = \theta_2$:

    $$0,42t = 2\pi - 0,16t$$
    $$t = \frac{2\pi}{0,58} = 10,83 \text{ s}$$

    También podríamos resolverlo usando las unidades del enunciado, en ese caso:

    $$\theta_1 = 4t$$
    $$\theta_2 = 1 - 1,5t$$

    comprueba que obtienes el mismo resultado.

36. Un disco de vinilo gira a 33 rpm. Al desconectar el tocadiscos, el disco tarda 5 s en parar. ¿Cuál ha sido la aceleración angular de frenado? ¿Cuántas vueltas ha dado hasta pararse?

    Solución. Suponemos que la aceleración es constante y por tanto el movimiento es MCUA. Cambiamos de unidades:

    $$\frac{33 \text{ revoluciones}}{1 \text{ minuto}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev.}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 3,46 \text{ rad/s}$$

y escribimos las ecuaciones del movimiento:

$$\left.\begin{array}{l}\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}\theta = 3,46t + \frac{1}{2}\cdot\alpha t^2 \\ \omega = 3,46 + \alpha t\end{array}\right\}$$

Como tarda 5 s en pararse:

$$0 = 3,46 + \alpha 5$$

$$\alpha = \frac{-3,46}{5} = -0,69 \text{ rad/s}^2$$

y finalmente obtenemos las vueltas:

$$\theta = 3,46 \cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot(-0,69)\cdot 5^2 = 17,3 - 8,625 = 8,675 \text{ rad}$$

$$8,675 \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}} = 1,38 \text{ vueltas}$$

37. Un volante de 2 dm de diámetro gira en torno a su eje a 3000 rpm y un freno lo para en 20 s. Calcula la aceleración angular, el número de vueltas que da hasta pararse y la aceleración normal y total de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas.

Solución. Suponiendo aceleración angular constante se trata de un MCUA:

$$\frac{3000 \text{ revoluciones}}{1 \text{ minuto}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev.}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}\theta = 100\pi t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = 100\pi + \alpha t\end{array}\right\}$$

Como tarda 20 s en pararse:

$$0 = 100\pi + \alpha 20$$

$$\alpha = \frac{-100\pi}{20} = -5\pi \text{ rad/s}^2$$

El número de vueltas:

$$\theta = 100\pi \cdot 20 + \frac{1}{2}\cdot(-5\pi)\cdot 20^2 = 2000\pi - 1000\pi = 1000\pi \text{ rad}$$

$$1000\pi \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2\pi \text{ rad}} = 500 \text{ vueltas}$$

La aceleración tangencial es constante:

$$a_{\mathrm{t}} = \alpha r = -5\pi \cdot 0,1 = -0,5\pi \text{ m/s}^2$$

y la normal depende de la velocidad de giro:

$$a_{\mathrm{n}} = \omega^2 r$$

por lo que calculamos la velocidad angular al cuadrado una vez pasadas 100 vueltas (que son $2\pi \cdot 100$ radianes):

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$

$$\omega^2 = (100\pi)^2 - 2 \cdot 5\pi \cdot 2\pi \cdot 100 = 8000\pi^2 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

y obtenemos la aceleración normal:

$$a_\text{n} = 8000\pi^2 \cdot 0,1 = 800\pi^2 \text{ m/s}^2$$

El vector aceleración es:

$$\mathbf{a} = -0,5\pi\mathbf{u}_\text{t} + 800\pi^2\mathbf{u}_\text{n}$$

y por tanto la aceleración total es su módulo:

$$a = \sqrt{(-0,5\pi)^2 + (800\pi^2)^2} = 7895,68\pi^2 \text{ m/s}^2$$

y como vemos la aceleración tangencial es despreciable frente a la normal.

DINÁMICA I

1. ¿La Tierra es un sistema de referencia inercial?

   Solución. No, porque al girar alrededor el Sol significa que experimenta una aceleración normal que la permita girar y de igual manera al girar sobre sí misma. Dichos valores de aceleración centrípeta son muy pequeños y habitualmente los despreciamos y consideramos la aproximación de que la Tierra es un sistema inercial pero en otras situaciones no podemos hacer esa aproximación, por ejemplo al lanzar un misil intercontinental, tenemos que corregir las ecuaciones del tiro parabólico teniendo en cuentan la rotación terrestre.

2. Razona si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas a la luz de la primera ley: *a*) Un cuerpo no puede desplazarse sin que una fuerza actúe sobre él. *b*) Toda variación en la velocidad de un cuerpo exige la actuación de una fuerza. *c*) Un cuerpo se para si la fuerza que actuaba sobre él se hace cero y se mantiene nula.

   Solución. *a*) Falso porque si lleva MRU y no actúa ninguna fuerza continuará moviéndose indefinidamente. *b*) Verdadero, si leemos la primera ley negándola comprobamos que es cierto. *c*) Falso. Si por ejemplo está girando al cesar la fuerza el cuerpo sigue moviéndose en MRU.

3. ¿Puede darse el caso de que sobre un cuerpo actúe una única fuerza, y sin embargo, el módulo de su velocidad sea constante?

   Solución. Sí, si describe un MCU, en ese caso la fuerza proporciona la fuerza centrípeta para que gire.

4. Razona la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: «desplazar un satélite de 1000 kg de masa en el espacio vacío y en situación de ingravidez no nos costaría ningún esfuerzo, ya que el satélite no pesaría nada».

   Solución. Tenemos que diferenciar entre masa y peso. En ingravidez el satélite no pesa, que significa que la Tierra no lo atrae, pero si queremos modificar su estado de movimiento, conforme nos dice la segunda ley, tenemos que aplicar una fuerza que depende de la masa. Por ejemplo si está quieto y queremos ponerlo en movimiento o si está en movimiento y queremos pararlo o si queremos que gire. Una vez en movimiento (que no sea circular), por la primera ley ya sabemos que no nos costará esfuerzo mantenerlo en movimiento.

5. Un cuerpo de 5 kg se mueve según la ecuación: $\mathbf{r} = 3t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ m. Calcula la fuerza que actúa sobre él e indica en qué dirección lo hace.

   Solución. Derivamos dos veces y obtenemos la aceleración:

$$\mathbf{a} = 6\mathbf{i}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

   y por la segunda ley de Newton, si un cuerpo de masa m experimenta una aceleración $\mathbf{a}$ significa que recibe una fuerza $\mathbf{F}$ conforme a la expresión:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{F} = 5 \cdot 6\mathbf{i} = 30\mathbf{i}\ \mathrm{N}$$

   Por lo que la fuerza tiene un módulo 6 N, la dirección del eje X y el sentido creciente.

6. Un cuerpo de 10 kg se encuentra inicialmente en la posición $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ m y sobre él comienza a actuar una fuerza constante $\mathbf{F} = 8\mathbf{i}$ N. Determina cuál será la ecuación de posición en función del tiempo y calcula el desplazamiento efectuado bajo la acción de dicha fuerza en los diez primeros segundos.

   Solución. Mediante la segunda ley de Newton averiguamos la aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{F}{m} = \frac{8\mathbf{i}}{10} = 0,8\mathbf{i}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

   Vemos que la aceleración solo actúa en el eje X y que es constante. Puede ser un MRUA o un MCU pero como el enunciado no dice nada entendemos que parte del reposo por lo que el movimiento solo puede ser MRUA. En el eje Y no hay movimento. Escribimos por tanto las ecuaciones de los ejes:

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$x = 2 + \frac{1}{2}0,8t^2$$
$$y = 5$$

   y escribimos la ecuación de posición en dos dimensiones:

$$\mathbf{r} = (2 + 0,4t^2)\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

   y el desplazamiento es:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \left[(2 + 0,4 \cdot 10^2)\mathbf{i} + 5\mathbf{j}\right] - (2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 40\mathbf{i}\ \mathrm{m}$$

7. ¿Puede un cuerpo moverse en una dirección o en un sentido distintos al de la fuerza que actúa sobre él? ¿Y puede acelerarse en una dirección diferente a la de la fuerza que actúa?

   Solución. Sí, por ejemplo en el MCU el cuerpo se mueve en una dirección tangente a la de la fuerza que recibe. O en un MRUA de frenado el cuerpo se mueve en sentido contrario a la fuerza que recibe. No, porque la segunda ley de Newton nos muestra que los vectores aceleración y fuerza solo se diferencian en una constante, la masa, por lo que tienen la misma dirección e incluso el mismo sentido puesto que la masa siempre es positiva.

8. ¿Por qué es menos peligroso chocar contra un montón de paja que contra el pilar de hormigón de un viaducto?

   Solución. La gravedad de un accidente la dicta la aceleración de frenado. Si chocamos con un montón de paja el vehículo frenará suavemente sin embargo si chocamos contra el pilar de un viaducto frenaremos en el menor de los tiempos posibles puesto que el pilar ni se mueve del sitio ni se deforma con nuestro golpe. Por eso el coche tiene dispositivos de seguridad que tratan de frenar al ocupante lo más lento posible. Por ejemplo la carrocería está diseñada para deformarse como un acordeón y el airbag nos frena más suavemente que el volante o el salpicadero (en un accidente importante el cinturón no impide que nos golpeemos con el salpicadero).

9. Sobre un cuerpo que se mueve con aceleración actúan solo dos fuerzas. De este hecho podemos deducir que: *a*) El cuerpo no puede moverse con velocidad constante. *b*) La velocidad del cuerpo nunca puede hacerse cero. *c*) La suma de las dos fuerzas nunca puede ser cero. *d*) Las dos fuerzas actúan a lo largo de la misma línea de acción.

   Solución. *a*) Cierto, porque dice que se mueve con aceleración por lo que las fuerzas no se anulan, por lo que no estamos en la primera ley y por tanto no puede moverse a velocidad constante (recuerda que en el MCU el módulo del vector velocidad es constante pero el vector no, constantemente varía su dirección y sentido). *b*) Falso, si por ejemplo ambas fuerzas tienen sentidos contrarios y frenan al cuerpo llegará un momento en que su velocidad se hará cero pero continuará aumentando la velocidad está vez en sentido contrario, o que esté realizando un MCUA de frenado. *c*) Cierto, porque nos han dicho que el cuerpo se mueve con aceleración. *d*) Falso, pueden actúar en cualquier dirección, ya hemos puesto la posibilidad de un MCUA de frenado, de que tengan sentidos contrarios y también pueden formar un ángulo cualquiera.

10. Un cuerpo de 10 kg, sometido a una fuerza constante, se mueve en cierto instante con una velocidad de $5\mathbf{i}$ m/s. Al cabo de 12 s, su velocidad es de $11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ m/s. *a*) Determina las componentes de la fuerza. *b*) Determina el valor de la fuerza.

    Solución. Como la fuerza es constante, la aceleración también lo será y podremos usar la definición de aceleración media:

    $$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{(11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - 5\mathbf{i}}{12} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} \text{ ms}^{-2}$$

    y por la ley fundamental de la dinámica:

    $$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = 10 \cdot (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 60\mathbf{i} + 40\mathbf{j} \text{ N}$$

    y su valor es:

    $$F = \sqrt{60^2 + 40^2} = 60,66 \text{ N}$$

11. Dibuja las fuerzas que actúan sobre una pelota de goma que cae desde cierta altura a un suelo duro y luego rebota, en lo siguiente momentos: *a*) Descenso. *b*) Impacto. *c*) Ascenso.

    Solución. Las fuerzas están dibujadas en la figura 21 y **N** es la fuerza normal que ejerce el suelo sobre la pelota y tiene que ser mayor que el peso para que la pelota salga hacia arriba.

a) y *c*) *b*)

Figura 21:

12. Infla un globo y, sin hacerle un nudo, suéltalo. ¿Cómo explicas lo que sucede?

    Solución. Por la tercera ley de Newton la fuerza que ejerce el globo sobre el aire se la devuelve el aire al globo pero con el sentido contrario y es la causa de que el globo se mueva. También podemos explicarlo mediante la conservación de la cantidad de movimiento. El globo y el aire forman un sistema aislado, y hemos estudiado que en estos sistemas las fuerzas internas se anulan (consecuencia de la tercera ley) y por lo tanto se conserva la cantidad de movimiento del sistema:

    $$\mathbf{p}_{\text{globo}} + \mathbf{p}_{\text{aire}} = 0$$

    $$\mathbf{p}_{\text{globo}} = -\mathbf{p}_{\text{aire}}$$

    y el globo sale disparado en sentido contrario al aire.

13. Por accidente se parte el cable que mantenía sujeto a la nave a un astronauta que había salido a hacer una reparación. ¿Qué le recomendarías que hiciera con su llave inglesa para regresar a ella?

    Solución. Tirarla en sentido contrario a la nave para que por acción-reacción le devolviera la fuerza en sentido a la nave.

14. Una esfera de 100 g cae desde una altura de 5 m sobre la arena de la playa y se hunde en ella 30 cm. Determina: *a*) La aceleración de frenado. *b*) La fuerza de frenado. *c*) El tiempo que tarda en detenerse desde que entra en contacto con la arena. *d*) Si se conserva la cantidad de movimiento de la esfera en algún instante.

    Solución. *a*) La caída libre es un MRUA:

    $$v^2 - v_0^2 = 2ae$$

    $$v^2 = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 5$$

    y el frenado en la arena consideramos que es MRUA y calculamos su aceleración constante:

    $$0 - v_0^2 = 2ae$$

    $$-2 \cdot 9{,}8 \cdot 5 = 2a \cdot 0{,}3$$

    $$a = \frac{-9{,}8 \cdot 5}{0{,}3} = -163{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

    b) El módulo de la fuerza es: $F = ma = 0{,}1 \cdot 163{,}33 = 16{,}33$ N

    c)

    $$v = v_0 + at \Rightarrow 0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5} - 163{,}33t \Rightarrow t = 0{,}06 \text{ s}$$

    d) No se conserva nunca puesto que la fuerza nunca se anula.

15. Determina la relación entre las masas de dos carritos, A y B, que colisionan. Para ello lanzamos el carrito A con una velocidad de 0,7 m/s contra el B, que está en reposo. Después del impacto, A rebota con una velocidad de 0,3 m/s, mientras que B sale despedido con una velocidad de 0,5 m/s.

    Solución. La situación inicial se muestra en la figura 22. Consideramos que no hay

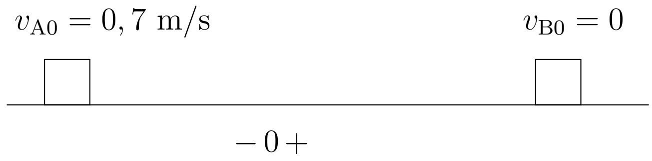

Figura 22:

rozamiento y por tanto en el momento del impacto no hay fuerzas externas por lo que se conserva la cantidad de movimiento del sistema formado por ambos carritos:

$$\mathbf{p}_{\mathrm{A}} + \mathbf{p}_{\mathrm{B}} = \mathrm{cte.}$$

Como el movimiento ocurre en una dimensión prescindimos de la notación vectorial:

$$p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}} = cte.$$

y la suma de la cantidad de movimiento inicial es igual que la final:

$$p_{\mathrm{A}0} + p_{\mathrm{B}0} = p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}}$$

$$m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}0} + m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}0} = m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}}$$

$$m_{\mathrm{A}} \cdot 0,7 + m_{\mathrm{B}} \cdot 0 = m_{\mathrm{A}} \cdot (-0,3) + m_{\mathrm{B}} \cdot 0,5$$

$$m_{\mathrm{A}} \cdot 1 = m_{\mathrm{B}} \cdot 0,5$$

por lo que la relación entre las masas es:

$$\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}} = 2$$

y vemos que el carrito B tiene el doble de masa que el A.

16. Un coche de 1400 kg de masa circula a 120 km/h y consigue frenar en 15 m. ¿Cuál ha sido la fuerza de frenado que ha actuado, suponiéndola constante?

    Solución. Pasamos la velocidad al SI:

$$\frac{120\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} \cdot \frac{10^3\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}} \cdot \frac{1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}} = 33,33\ \mathrm{m/s}$$

Como es un MRUA calculamos la aceleración:

$$v^2 - v_0^2 = 2ae$$

$$0 - 33,33^2 = 2a15$$

$$a = \frac{-33,33^2}{15} = -37,03\ \mathrm{m/s}^{-2}$$

y mediante la segunda ley de Newton calculamos la fuerza de frenado:

$$F = ma = 1400 \cdot 37,03 = 51841,48\ \mathrm{N}$$

17. Una partícula de 2 kg se mueve en la dirección X con una velocidad: $v = -16 + 4t^2$ m/s. a) Deduce la expresión para la fuerza que actúa sobre dicha partícula, así como su valor a los 2 s. b) ¿Cambia de sentido el movimiento de la partícula? Indica cuántas veces.

    Solución. a) Derivamos la velocidad y obtenemos que $a = 8t$ y $F = 16t$ y $F(2) = 32$ N. b) Sí, cambia una vez, porque inicialmente se desplaza hacia el sentido decreciente pero la fuerza lo frena hasta que cambia el sentido y continúa indefinidamente hacia el sentido creciente.

18. Una partícula de masa 300 g se mueve a 0,5 m/s a lo largo del eje X y choca contra una partícula de 400 g que se halla en reposo. Después del choque, la primera partícula se mueve a $0,2$ m/s en una dirección que forma 30º con el eje X. Determina: a) La magnitud y la dirección de la velocidad de la segunda partícula después del choque. b) La variación de la velocidad y del momento lineal de cada partícula.

    Solución. La situación inicial se representa en la figura 23.

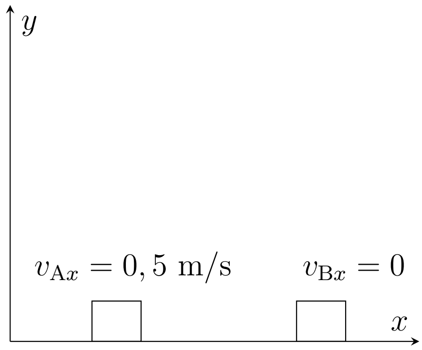

Figura 23:

Consideramos que no hay rozamiento y por tanto en el momento del impacto no hay fuerzas externas por lo que se conserva la cantidad de movimiento del sistema:

$$\mathbf{p}_{\mathrm{A}} + \mathbf{p}_{\mathrm{B}} = \text{cte.}$$

y la suma de la cantidad de movimiento inicial es igual que la final:

$$\mathbf{p}_{\mathrm{A}} + \mathbf{p}_{\mathrm{B}} = \mathbf{p}'_{\mathrm{A}} + \mathbf{p}'_{\mathrm{B}} \tag{1}$$

Como el movimiento ocurre en dos dimensiones vamos a calcular por separado el eje X y el eje Y. Las velocidades iniciales son:

$$v_{\mathrm{A}x} = 0,5 \text{ m/s} \qquad v_{\mathrm{B}x} = v_{\mathrm{B}y} = v_{\mathrm{A}y} = 0$$

y las finales:

$$v'_{\mathrm{A}x} = v'_{\mathrm{A}} \cos 30^{\circ} \qquad v_{\mathrm{A}y'} = v'_{\mathrm{A}} \operatorname{sen} 30^{\circ}$$
$$v'_{\mathrm{A}x} = 0,2 \cos 30^{\circ} \qquad v'_{\mathrm{A}y} = 0,2 \operatorname{sen} 30^{\circ}$$

como muestra la figura 24.

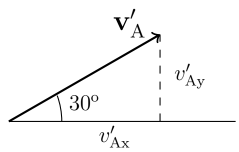

Figura 24:

La ecuación 1 queda:

$$\left.\begin{aligned} p_{\mathrm{A}x} + p_{\mathrm{B}x} &= p'_{\mathrm{A}x} + p'_{\mathrm{B}x} \\ p_{\mathrm{A}y} + p_{\mathrm{B}y} &= p'_{\mathrm{A}y} + p'_{\mathrm{B}y} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}x} + m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}x} &= m_{\mathrm{A}}v'_{\mathrm{A}x} + m_{\mathrm{B}}v'_{\mathrm{B}x} \\ m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}y} + m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}y} &= m_{\mathrm{A}}v'_{\mathrm{A}y} + m_{\mathrm{B}}v'_{\mathrm{B}y} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0,3 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0 &= 0,3 \cdot 0,2 \cos 30^{\mathrm{o}} + 0,4 \cdot v'_{\mathrm{B}x} \\ 0,3 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0 &= 0,3 \cdot 0,2 \,\mathrm{sen}\, 30^{\mathrm{o}} + 0,4 \cdot v'_{\mathrm{B}y} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0,3 \cdot 0,5 &= 0,3 \cdot 0,2 \cos 30^{\mathrm{o}} + 0,4 \cdot v'_{\mathrm{B}x} \\ 0 &= 0,3 \cdot 0,2 \,\mathrm{sen}\, 30^{\mathrm{o}} + 0,4 \cdot v'_{\mathrm{B}y} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0,15 &= 0,06 \cos 30^{\mathrm{o}} + 0,4 \cdot v'_{\mathrm{B}x} \\ -0,03 &= +0,4 \cdot v'_{\mathrm{B}y} \end{aligned}\right\}$$

y finalmente obtenemos:

$$v'_{\mathrm{B}x} = 0,25 \text{ m/s} \qquad v'_{\mathrm{B}y} = -0,075 \text{ m/s}$$

por lo que el cuerpo B sale desplazado hacia la derecha y abajo. Su magnitud es:

$$v'_{\mathrm{B}} = \sqrt{0,25^2 + 0,075^2} = 0,26 \text{ m/s}$$

y su dirección forma:

$$\mathrm{arc\,tg}\,\frac{-0,075}{0,25} = -16,70^{\mathrm{o}}$$

con el eje X.

19. Las fuerzas grandes siempre producen un mayor impulso que las pequeñas. ¿Es este enunciado verdadero o falso?

Solución. No es cierto porque el impulso mecánico es:

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}_{\mathrm{m}}\Delta t$$

y depende del tiempo, por lo que una fuerza débil que actúe durante mucho tiempo puede tener más impulso que una fuerte que actúe durante poco tiempo.

20. Algunos tenistas logran en sus servicio comunicar a la pelota velocidades de 200 km/h. Si la masa de la pelota es de 100 g y el impacto dura 0,15 s, ¿qué fuerza media ha actuado sobre la pelota?

Solución. La segunda ley de Newton para valores medios de la fuerza es:

$$F_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \mathbf{F}_{\mathrm{m}} = \frac{0,1(55,55 - 0)}{0,15} = 37,04 \text{ N}$$

21. Una pelota de béisbol de 140 g de masa llega horizontalmente al bate con una velocidad de 39 m/s. Tras el impacto sale despedida con una velocidad de 45 m/s, formando un ángulo de 30º sobre la horizontal. ¿Cuánto vale el impulso comunicado a la pelota?

    Solución. El impulso mecánico es $\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p}$ por lo que tenemos que calcular cuánto varía la cantidad de movimiento $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$. Consideremos el sentido hacia el bate negativo y el que se aleja positivo. Tenemos que tener en cuenta los ejes X e Y puesto que se aleja con 30º sobre la horizontal, por tanto calculamos por componentes:

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_{\mathrm{x}} &= p_{\mathrm{x}} - p_{\mathrm{x0}} \\ \Delta p_{\mathrm{y}} &= p_{\mathrm{y}} - p_{\mathrm{y0}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_{\mathrm{x}} &= m(v_{\mathrm{x}} - v_{\mathrm{x0}}) \\ \Delta p_{\mathrm{y}} &= m(v_{\mathrm{y}} - v_{\mathrm{y0}}) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_{\mathrm{x}} &= 0,140\,[45\cos 30^{\mathrm{o}} - (-39)] \\ \Delta p_{\mathrm{y}} &= 0,140\,(45\,\mathrm{sen}\,30^{\mathrm{o}} - 0) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta p_{\mathrm{x}} &= 10,92\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s} \\ \Delta p_{\mathrm{y}} &= 3,15\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s} \end{aligned}\right\}$$

    y el impulso vale $\mathbf{I} = 10,92\mathbf{i} + 3,15\mathbf{j}$ N · s y vemos que las unidades N · s y kg · m/s son equivalentes.

DINÁMICA II

1. Si tu masa es de 60 kg y te encuentras en caída libre cerca de la superficie terrestre: *a*) ¿Con qué fuerza te atrae la Tierra a ti? ¿Con qué fuerza atraes tú a la Tierra? *b*) ¿Qué efecto te produce a ti dicha fuerza? ¿Qué efecto le produce a la Tierra dicha fuerza? Dato: $M_{\mathrm{T}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

    Solución. *a*) El peso es la fuerza con la que la Tierra nos atrae por lo que me atrae con $P = mg = 60 \cdot 9,8 = 588$ N. Por la tercera ley de Newton si la Tierra me atrae con 588 N yo atraigo a la Tierra con 588 N. *b*) Para comprobar el efecto usamos la segunda ley de Newton sobre mi:

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{588}{60} = 9,8\ \mathrm{m/s}^{-2}$$

    y sobre la Tierra:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{588}{6 \cdot 10^{24}} = 9,8 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{m/s}^{-2}$$

    y comprobamos que aunque la fuerza es la misma el efecto no es el mismo debido a las diferentes masas y de hecho la aceleración que experimenta la Tierra podemos considerarla cero.

2. Si la fuerza de atracción gravitatoria tuviera un valor constante de 100 N para todos los cuerpos, ¿qué cuerpo caería más rápido, uno de 10 kg o uno de 20 kg?

   Solución. El peso de un cuerpo es $P = mg$ y para averiguar qué efecto produce a un cuerpo aplicamos la segunda ley de Newton $F = ma$, igualando ambas:

   $$mg = ma$$

   $$a = g$$

   y por tanto todos los cuerpo caen con la misma aceleración. Esto es debido a que el peso de un cuerpo depende de su masa y a que la segunda ley también depende de la masa. Supongamos que el peso de los cuerpos vale 100 N independientemente de su masa. En ese caso el efecto que le produce es:

   $$100 = ma$$

   $$a = \frac{100}{m}$$

   y por tanto los cuerpos con menos masa caerán con más aceleración.

3. ¿Hasta qué altura podemos considerar 9,8 m/s^2 como valor de g sin superar un 2 % de error? Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ kg^{-2}, $M_{\mathrm{T}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg y $R_{\mathrm{T}} =$ 6370 km.

   Solución. En la superficie de la Tierra la aceleración de la gravedad vale:

   $$g = \frac{GM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,8 \text{ m/s}^{-2}$$

   Calculemos el valor de g que no supera el 2 % de error:

   $$\frac{9,8 - g'}{9,8} = 0,02$$

   $$g' = 9,604 \text{ m/s}^{-2}$$

   y calculemos la distancia al centro de la Tierra que le corresponde:

   $$g' = \frac{GM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}'^2}$$

   $$R_{\mathrm{T}}' = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{T}}}{g'}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{9,604}} = 6,444 \cdot 10^6 \text{ m}$$

   por lo que hasta una altura de $6444 - 6370 = 74$ km podemos usar 9,8 m/s^2 sin superar un error del 2 %.

4. Determina el valor de la aceleración de la gravedad en Mercurio si su masa es 0,055 veces la masa terrestre y su radio 0,38 veces el radio de la Tierra. En esas condiciones, ¿hasta qué altura máxima se elevaría un objeto lanzado verticalmente si con la misma velocidad en la Tierra se eleva 20 m?

Solución. La aceleración de la gravedad en Mercurio es:

$$g_{\mathrm{M}} = \frac{GM_{\mathrm{M}}}{R_{\mathrm{M}}^2}$$

nos dan estas equivalencias:

$$M_{\mathrm{M}} = 0,055M_{\mathrm{T}} \qquad R_{\mathrm{M}} = 0,38R_{\mathrm{T}}$$

y las sustituimos:

$$g_{\mathrm{M}} = \frac{G \cdot 0,055M_{\mathrm{T}}}{(0,38 \cdot R_{\mathrm{T}})^2} = \frac{0,055}{0,38^2} \cdot \frac{GM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}^2} = 0,1444 \cdot 9,8 = 1,42 \ \mathrm{m/s^2}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\frac{GM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}^2} = 9,8 \ \mathrm{m/s^2}$$

Es un MRUA, por lo que se cumple que $v^2 = 2ae$ y como salen con la misma velocidad:

$$2 \cdot 9,8 \cdot 20 = 2 \cdot 1,42 \cdot e$$

por lo que alcanzaría una altura de 138,03 m.

5. ¿Qué valor tiene g a 400 km de altura sobre la superficie terrestre? ¿Cómo se explica el estado de ingravidez de los astronautas que reparan satélites o habitan estaciones orbitales a esa altura? Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m$^2 \cdot$ kg^{-2}, $R_{\mathrm{T}} = 6400$ km y $M_{\mathrm{T}} = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

   Solución. Calculamos g a 400 km de altura respecto a la superficie terrestre:

   $$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,770 \cdot 10^6)^2} = 8,7 \ \mathrm{m/s^2}$$

   Como vemos no hay ingravidez a 400 km. La aparente ingravidez es porque se encuentran girando alrededor de la Tierra y por tanto la fuerza gravitatoria no los ancla al suelo de la nave sino que les permite girar, se encuentran en una situación semejante a una caída libre. Cuando estamos en reposo en la Tierra la fuerza normal nos "recuerda" que hay gravedad.

6. Un disco se desliza por una superficie horizontal partiendo con una velocidad inicial de 3,5 m/s. Si su velocidad después de recorrer 2 m es de 2 m/s, ¿cuánto vale el coeficiente de rozamiento entre disco y suelo? ¿Qué tipo de rozamiento has determinado?

   Solución. Averiguamos la aceleración de frenado:

   $$v^2 - v_0^2 = 2ae$$

   $$2^2 - 3,5^2 = 2a \cdot 2 \Rightarrow a = -2,06 \ \mathrm{m/s^{-2}}$$

   Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo se representan en la figura 25.

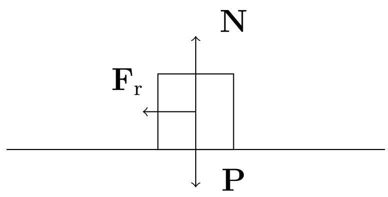

Figura 25:

La fuerza de rozamiento es:

$$F_{\mathrm{r}} = \mu N$$

Como el cuerpo no se hunde en la superficie significa que el peso y la normal están equilibradas por lo que tienen el mismo módulo y podemos escribir:

$$F_{\mathrm{r}} = \mu mg$$

Por tanto solo nos queda la fuerza de rozamiento sin equilibrar y mediante la segunda ley de Newton vemos que es la responsable de la aceleración de frenado que calculamos antes:

$$F = ma$$

$$\mu mg = ma$$

y calculamos fácilmente el coeficiente de rozamiento:

$$\mu = \frac{a}{g} = 0,21$$

Se trata del coeficiente de rozamiento cinético puesto que las superficies se encontraban en movimiento relativo.

7. Un cuerpo es impulsado con una velocidad inicial v_0 para que ascienda por un plano inclinado θ grados con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre cuerpo y plano es μ_{c}, determina una expresión para: *a*) La aceleración del cuerpo durante el ascenso. *b*) La distancia s que recorre en el ascenso hasta que se para.

   Solución. Las fuerzas que actúan se representan en la figura 26. Como vemos, la

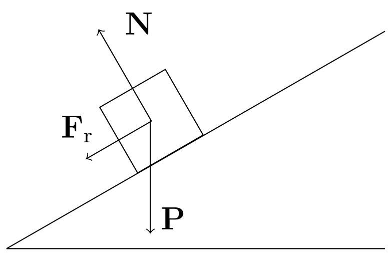

Figura 26:

suma de las tres fuerzas no se anula. Por tanto nos encontramos en la segunda ley de Newton y la resultante de dichas fuerzas proporcionará la aceleración al cuerpo.

Para sumarlas tenemos que elegir un sistema de referencia. Existen infinitas elecciones pero muchas no nos aportan ninguna información para resolver el ejercicio. Como el movimiento es a través del plano elegimos un sistema con un eje paralelo (tangencial) y otro normal al plano. Así la fuerza normal y la fuerza de rozamiento se encuentran en los ejes y solo tenemos que descomponer la fuerza peso como se muestra en la figura 27.

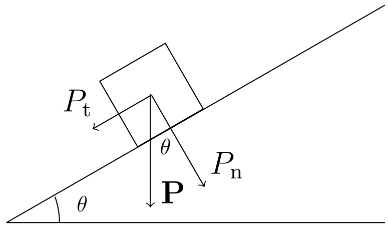

Figura 27:

Por tanto el peso nos queda:

$$\mathbf{P} = P_t\mathbf{u}_t + P_n\mathbf{u}_n$$

considerando que los unitarios van ambos hacia abajo. También podríamos llamar a los ejes X e Y en lugar de tangencial y normal y nos quedaría:

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j}$$

Sigamos con la suma de fuerzas. Como el cuerpo ni flota ni se hunde, la componente normal del peso se tiene que equilibrar con la normal. El ángulo que forman $\mathbf{P}$ y P_n es el mismo que el del plano inclinado puesto que sus lados son mutuamente perpendiculares y se cumple:

$$P_t = P \operatorname{sen}\theta \qquad P_n = P\cos\theta$$

$$N = P_n \qquad F_r = \mu N = \mu P_n = \mu P\cos\theta$$

La fuerza resultante R será la suma de la componente tangencial del peso y la fuerza de rozamiento:

$$R = P_t + F_r$$

$$R = P\operatorname{sen}\theta + \mu P\cos\theta$$

$$R = mg\operatorname{sen}\theta + \mu mg\cos\theta$$

y aplicando finalmente la segunda ley de Newton:

$$mg\operatorname{sen}\theta + \mu mg\cos\theta = ma$$

$$a = g\operatorname{sen}\theta + \mu g\cos\theta$$

$$a = g(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)$$

que es una aceleración de frenado.

b) Como la aceleración es constante se trata de un MRUA y como la distancia recorrida s no puede ser negativa escribimos la aceleración negativa o bien consideramos valores absolutos:

$$0 - v_0^2 = 2as$$

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)}$$

8. Una fuerza de 55 N empuja un bloque de 22 N de peso contra la pared. El coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y la pared es de 0,6. Si el bloque está inicialmente en reposo: *a*) ¿Seguirá en reposo? *b*) ¿Cuál es la fuerza que ejerce la pared sobre el cuerpo?

   Solución. Las fuerzas se representan en la figura 28.

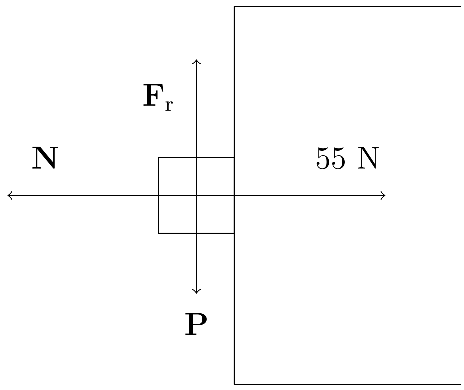

Figura 28:

   si el bloque ejerce una fuerza de 55 N sobre la pared, por acción-reacción, la pared ejerce una fuerza de 55 N sobre el bloque, esto es, le proporciona una normal de 55 N. Se cumple por tanto:

$$N = 55 \text{ N}$$

$$F_\mathrm{r} \leq \mu N$$

$$F_\mathrm{r} \leq 0,6 \cdot 55$$

$$F_\mathrm{r} \leq 33 \text{ N}$$

   y por tanto está en equilibrio puesto que la fuerza de rozamiento estática puede llegar a valer 33 N y como el peso es de solo 22 N hay fuerza de rozamiento suficiente para equilibrar al peso.

9. Un objeto se encuentra en el maletero de un coche. *a*) Dibuja las fuerzas que recibe el objeto cuando el coche acelera. *b*) Dibuja las fuerzas que recibe el objeto cuando el coche va a velocidad constante.

   Solución. *a*) Las fuerzas se representan en la figura 29 considerando que el coche se desplaza hacia la derecha.

   Cuando el coche acelera hacia la derecha, el rozamiento debido al contacto entre el objeto y el maletero genera una fuerza de rozamiento sobre el maletero hacia la izquierda que se opone al movimiento. La pareja de acción-reacción se encuentra

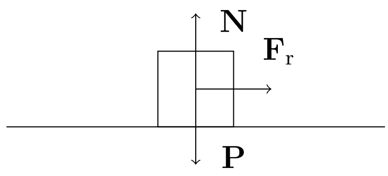

Figura 29:

en el objeto y con sentido contrario. De esta manera el objeto puede moverse solidariamente con el maletero. Como vemos la fuerza de rozamiento no siempre se opone al movimiento, en este caso lo favorece. Si hubiera poco rozamiento el objeto se quedaría atrás respecto al maletero. La misma situación ocurre en la cinta del cajero de un supermercado.

b) Cuando el coche va a velocidad constante nos encontramos en la primera ley y la resultante de las fuerzas que recibe el objeto es cero por lo que no recibe fuerza de rozamiento y solo recibe el peso y la normal que se anulan mutuamente.

10. Un cuerpo de 2 kg está situado encima de otro cuerpo de 10 kg. El coeficiente de rozamiento entre ambos es 0,2 y se considera despreciable el rozamiento con la mesa. Si sobre el cuerpo de 10 kg ejercemos una fuerza de 200 N, determina: *a*) La fuerza neta que actúa sobre el cuerpo inferior. *b*) Ídem sobre el cuerpo superior. *c*) La aceleración que adquiere cada cuerpo. Nota: caben dos posibilidades, que se muevan solidariamente o que el cuerpo superior se quede atrás.

Solución. Las fuerzas se representan en la figura 30.

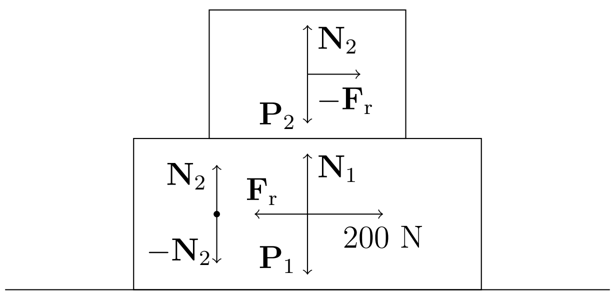

Figura 30:

El cuerpo superior no se hunde porque el inferior le proporciona una normal $\mathbf{N}_2$ y por acción-reacción el superior le devuelve dicha fuerza, que la representamos separada del resto para que se vea. A su vez el inferior transmite dicha fuerza al suelo y este le devuelve la misma fuerza con el sentido contrario.Para cada cuerpo sus fuerzas verticales se anulan puesto que los cuerpos ni suben ni bajan por lo que se cumplen estas igualdades entre sus módulos:

$$P_1 = N_1 \qquad P_2 = N_2$$

Cuando intentamos desplazar el cuerpo inferior, surge una fuerza de rozamiento debido al contacto con el cuerpo superior, y esta fuerza impide su movimiento. Por la tercera ley de Newton si el cuerpo superior ejerce una fuerza sobre el inferior, este se la devuelve con el sentido contrario, por eso en el esquema hemos escrito $-\mathbf{F}_\mathrm{r}$, y esa fuerza es la responsable de que el cuerpo superior se desplace, si existe suficiente rozamiento entre ambos cuerpos. La fuerza de rozamiento es:

$$F_\mathrm{r} = \mu N_2 = \mu m_2 g = 0,2 \cdot 2 \cdot 9,8 = 3,92 \text{ N}$$

Para darnos cuenta de que depende de N_2 y no de N_1 pensemos que si el cuerpo superior tuviera más masa habría más fuerza de rozamiento pero no ocurriría lo mismo si aumentara la masa del inferior. *a*) La fuerza neta sobre el cuerpo inferior es de $200 - 3,92 = 196,08$ N. *b*) La fuerza neta sobre el cuerpo superior es de $3,9$ N. *c*) Aplicamos la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

$$a_1 = \frac{196,08}{10} = 19,608 \text{ m/s}^{-2} \qquad a_2 = \frac{3,92}{2} = 1,96 \text{ m/s}^{-2}$$

y vemos que el cuerpo superior se queda atrás.

11. Se coloca un bloque de 3 kg encima de otro de 10 kg. El coeficiente de rozamiento cinético entre este último bloque y el suelo es de 0,25. Si sobre el bloque de 10 kg actúa una fuerza horizontal, F, de 120 N, determina: *a*) ¿Qué aceleración adquiere el conjunto. *b*) ¿Qué fuerza provoca la aceleración del bloque de 3 kg? *c*) ¿Cuál debe ser el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre ambos bloques para que el de 3 kg no resbale?

    Solución. Las fuerzas se representan en la figura 32.

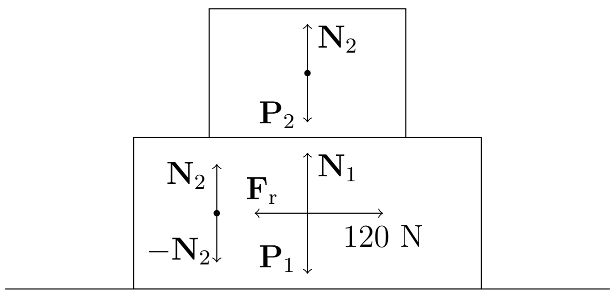

Figura 31:

El cuerpo superior no se hunde porque el inferior le proporciona una normal $\mathbf{N}_2$ y por acción-reacción el superior le devuelve dicha fuerza, que la representamos separada del resto para que se vea. A su vez el inferior transmite dicha fuerza al suelo y este le devuelve la misma fuerza con el sentido contrario.Para cada cuerpo sus fuerzas verticales se anulan puesto que los cuerpos ni suben ni bajan por lo que se cumplen estas igualdades entre sus módulos:

$$P_1 = N_1 \qquad P_2 = N_2$$

a) Para calcular la fuerza de rozamiento tenemos en cuenta que hay dos fuerzas normales y su valor máximo es:

$$F_\mathrm{r} = \mu(N_1 + N_2) = \mu(m_1 g + m_2 g) = 0,25 \cdot 13 \cdot 9,8 = 31,85 \text{ N}$$

y para calcular la aceleración aplicamos la segunda ley de Newton al conjunto de los dos cuerpos:

$$F = ma$$

$$120 - 31,85 = 13a$$

$$a = \frac{88,15}{13} = 6,78 \text{ m/s}^2$$

b) Ninguna, por lo tanto se queda en el mismo sitio hasta que acaba cayendo.
c) La fuerza de rozamiento que surgiría en el bloque superior hacia la derecha debe proporcionarle una aceleración de 6,78 m/s^2:

$$F = ma$$

$$\mu m_2 g = m_2 \cdot 6,78$$

$$\mu = \frac{6,78}{9,8} = 0,69$$

12. Dos cubos, de 10 y 5 kg de masa respectivamente, se encuentran uno junto a otro sobre una mesa. El cubo más pesado recibe una fuerza de 100 N de dirección horizontal y sentido hacia el cubo más ligero. El coeficiente de rozamiento vale 0,2 para el más pesado y 0,1 para el más ligero. Dibuja todas las fuerzas que actúan sobre ambos cuerpos. Calcula la aceleración con la que se mueve el conjunto. ¿Qué fuerza impulsa al cuerpo más ligero y cuánto vale? Comprueba que se cumple la segunda ley en el cuerpo pesado.

Solución. Las fuerzas se representan en la figura 32.

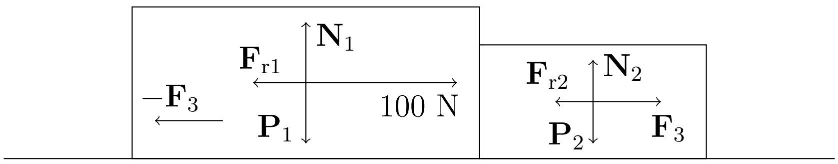

Figura 32:

La fuerza F_3 surge cuando el cuerpo grande empuja al pequeño y luego este le devuelve la pareja de acción-reacción. Aplicamos el ppo. fundamental de la dinámica al conjunto:

$$100 - F_{r1} - F_{r2} = (m_1 + m_2)a$$

$$100 - \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = (m_1 + m_2)a$$

$$100 - 0,2 \cdot 10 \cdot 9,8 - 0,1 \cdot 5 \cdot 9,8 = 15a$$

$$100 - 19,6 - 4,9 = 15a$$

$$a = \frac{75,5}{15} = 5,03 \text{ m/s}^{-2}$$

La fuerza que impulsa al cuerpo ligero es $\mathbf{F}_3$ y para averiguar su módulo aplicamos la segunda ley al cuerpo ligero:

$$F_3 - F_{r2} = m_2 a$$

$$F_3 = F_{r1} + m_2 a = 4,9 + 5 \cdot 5,03 = 30,07 \text{ N}$$

Para comprobar que se cumple la segunda ley en el cuerpo pesado se la aplicamos y comprobamos que sufre la misma aceleración que el conjunto:

$$100 - F_{r1} - F_3 = m_1 a$$

$$a = \frac{100 - F_{r1} - F_3}{m_1} = \frac{100 - 19,6 - 30,07}{10} = 5,03 \text{ m}/s^{-2}$$

13. *a*) Dibuja las fuerzas para el péndulo simple y aplica la segunda ley de Newton. *b*) Dibuja las fuerzas para el péndulo cónico y aplica la segunda ley de Newton.

Solución. *a*) Las dos únicas fuerzas que actúan se muestran en la figura 33.

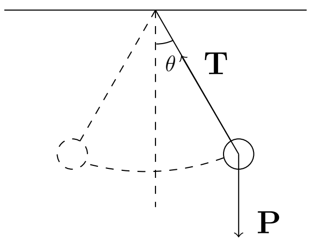

Figura 33:

Estas fuerzas proporcionan la fuerza centrípeta a la lenteja (el cuerpo que oscila) para que gire así que vamos a elegir los ejes cartesianos haciendo que coincidan con la dirección del hilo como se muestra en la figura 34.

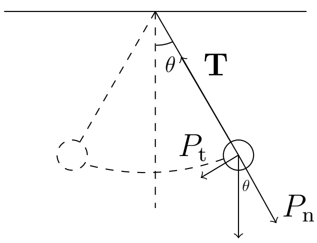

Figura 34:

Descomponemos la fuerza peso:

$$\left.\begin{aligned} P_n &= P\cos\theta = mg\cos\theta \\ P_t &= P\,\mathrm{sen}\,\theta = mg\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\}$$

y aplicamos la segunda ley de Newton a cada eje (r es el radio de giro y coincide con la longitud L de hilo):

$$\left.\begin{aligned} T - P_n &= m\frac{v^2}{r} \\ P_t &= ma_t \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} T - mg\cos\theta &= m\frac{v^2}{r} \\ mg\,\mathrm{sen}\,\theta &= ma_t \end{aligned}\right\}$$

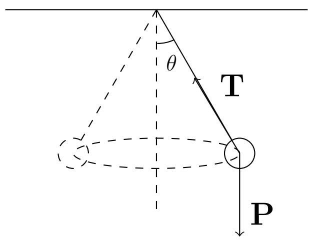

Figura 35:

y vemos que la aceleración tangencial es máxima en los extremos y cero en la vertical ($\theta = 0$)

b) Ahora impulsamos la lenteja de tal manera que el hilo describa un cono (cucurucho), como se muestra en la figura 35.

Ahora la fuerza centrípeta es horizontal y elegimos unos ejes cartesianos $X - Y$ como se muestra en la figura figura 36.

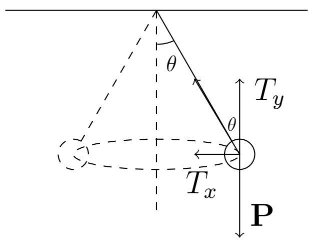

Figura 36:

La vertical, el hilo y la horizontal delimitan un triángulo rectángulo por lo que el ángulo entre **T** y T_x es complementario de θ y como T_x y T_y forman un ángulo recto sabemos que el ángulo entre **T** y T_y es θ. Descomponemos la tensión:

$$\left.\begin{aligned} T_y &= T\cos\theta \\ T_x &= T\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\}$$

y aplicamos la segunda ley de Newton a cada eje (r es el radio de giro y está relacionado con la longitud del hilo mediante $r = L\operatorname{sen}\theta$):

$$\left.\begin{aligned} T\cos\theta &= mg \\ T\operatorname{sen}\theta &= m\frac{v^2}{r} \end{aligned}\right\}$$

y dividiendo la segunda entre la primera obtenemos:

$$v = \sqrt{gr\operatorname{tg}\theta}$$

que es la velocidad a la que gira la lenteja si la longitud del hilo es L y forma un ángulo con la vertical θ.

14. Deduce una expresión para el periodo de oscilación o revolución del péndulo cónico en función de la longitud del hilo L y del ángulo que forma este con la vertical θ.

Solución. Las ecuaciones que cumple el péndulo cónico son:

$$\left.\begin{aligned} T\cos\theta &= mg \\ T\operatorname{sen}\theta &= m\frac{v^2}{r} \end{aligned}\right\}$$

Dividimos la segunda entre la primera:

$$v^2 = gr\operatorname{tg}\theta$$

sustituimos $v = \omega r$:

$$\omega^2 r = g\operatorname{tg}\theta$$

sustituimos $r = L\operatorname{sen}\theta$:

$$\omega^2 L = \frac{g}{\cos\theta}$$

sustituimos $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

y como vemos no depende de la masa sino solo de la longitud del hilo y de la separación de la vertical.

15. Dibuja las fuerzas que recibe una persona dentro de un ascensor en los siguientes casos: *a*) El ascensor está parado. *b*) El ascensor arranca. *c*) El ascensor sube a velocidad constante. *d*) El ascensor frena.

Solución. Las fuerzas se muestran en la figura 37.

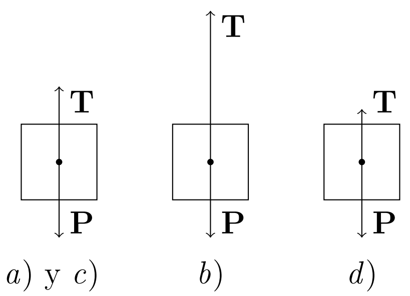

Figura 37:

En los apartados *a*) y *c*) nos encontramos en la primera ley por lo que las fuerzas se anulan. En el apartado *b*) nos encontramos en la segunda ley de Newton y la tensión que aplica el cable a la caja del ascensor debe ser mayor que el peso para que así la resultante proporcione la aceleración para arrancar. En el apartado *d*) ocurre al contrario y al disminuir la tensión la resultante proporciona una aceleración de frenado.

16. Una persona, cuya masa es de 53 kg, se encuentra subido en una balanza en el interior de un ascensor. Determina la lectura que dará la balanza en cada uno de los siguientes casos: *a*) El ascensor está en reposo. *b*) Acelera hacia arriba a 2,5 m/s^2. *c*) Asciende a velocidad constante. *d*) Asciende frenando a razón de 2,0 m/s^2.

17. Dibuja las fuerzas que recibe un coche que describe una curva sin peralte y calcula la velocidad máxima de paso por curva.

    Solución. La figura 25 representa las fuerzas si el coche está girando hacia la izquierda y lo vemos desde atrás. El peso y la normal están equilibradas pero la fuerza de rozamiento no, de hecho no puede estar equilibrada, ella es la responsable de que el coche gire, es la que proporciona la fuerza centrípeta. Sabemos que si el cuerpo gira con velocidad v y radio r el cuerpo debe tener una aceleración centrípeta $a_\mathrm{c} = \frac{v^2}{r}$ por lo que la segunda ley de Newton tiene que cumplir que:

$$F = ma$$

$$F_\mathrm{r} = m\frac{v^2}{r}$$

    La fuerza de rozamiento cumple que $F_\mathrm{r} \leq \mu N$ por lo que la velocidad máxima de paso por curva la deducimos de:

$$\mu N = m\frac{v_\text{máx}^2}{r}$$

$$\mu mg = m\frac{v_\text{máx}^2}{r}$$

    y la velocidad máxima de paso por la curva es:

$$v_\text{máx} = \sqrt{\mu g r}$$

18. Dibuja las fuerzas que recibe un coche que describe una curva peraltada sin rozamiento y calcula la velocidad de paso por curva.

    Solución. Solo actúan dos fuerzas, como se muestra en la figura 38 (el coche gira a la izquierda y lo vemos desde atrás).

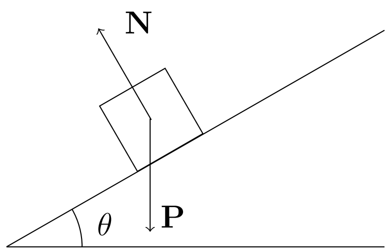

Figura 38:

    La fuerza centrípeta sabemos que es radial, por eso elegimos los ejes como se muestra en la figura 39 y sabemos que el ángulo entre la normal y el eje y es θ porque sus lados son perpendiculares a los lados del plano inclinado. Descomponemos la fuerza normal:

$$\left.\begin{aligned} N_y &= N\cos\theta \\ N_x &= N\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\}$$

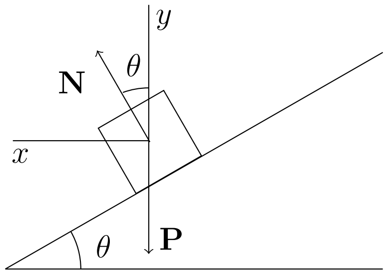

Figura 39:

La componente vertical de la normal se equilibra con el peso y la componente horizontal proporciona la fuerza centrípeta:

$$\left.\begin{aligned} N\cos\theta &= mg \\ N\,\mathrm{sen}\,\theta &= m\frac{v^2}{r} \end{aligned}\right\}$$

Dividiendo la segunda entre la primera:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{gr\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

que es la velocidad de paso por curva. Si va despacio descenderá en el peralte y si va más rápido ascenderá.

19. Dibuja las fuerzas que actúan sobre un coche estacionado en una curva peraltada.

    Solución. El coche tiene tendencia a resbalar por el peralte y la fuerza de rozamiento se opone al movimiento tal y como se muestra en la figura 40.

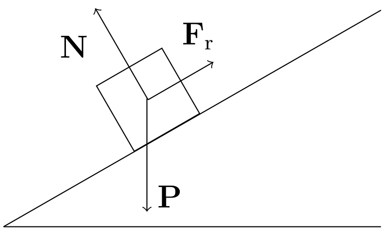

Figura 40:

20. Dibuja las fuerzas que actúan sobre un coche que describe una curva peraltada con rozamiento y calcula su velocidad máxima de paso por curva.

    Solución. El coche tiene tendencia a seguir recto peroo el peralte se lo impide obligándole a subir y la fuerza de rozamiento se opone al movimiento tal y como se muestra en la figura 41.

    Para averiguar el ángulo entre la fuerza de rozamiento y el eje x tenemos en cuenta que los ángulos complementarios suman 90º (figura 42).

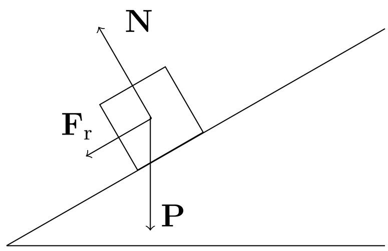

Figura 41:

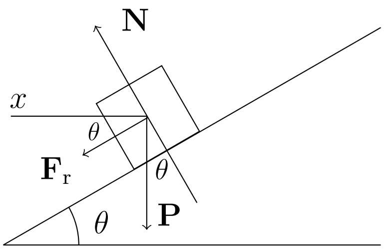

Figura 42:

Descomponemos la normal y la fuerza de rozamiento:

$$\left.\begin{aligned} N_y &= N\cos\theta \\ N_x &= N\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} F_{\mathrm{ry}} &= F_{\mathrm{r}}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ F_{\mathrm{rx}} &= F_{\mathrm{r}}\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} F_{\mathrm{ry}} &= \mu N\,\mathrm{sen}\,\theta \\ F_{\mathrm{rx}} &= \mu N\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

Y aplicamos la segunda ley de Newton en cada eje:

$$\left.\begin{aligned} N\cos\theta - \mu N\,\mathrm{sen}\,\theta &= mg \\ N\,\mathrm{sen}\,\theta + \mu N\cos\theta &= m\frac{v_{máx}^2}{r} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} N(\cos\theta - \mu\,\mathrm{sen}\,\theta) &= mg \\ N(\mathrm{sen}\,\theta + \mu\cos\theta) &= m\frac{v_{máx}^2}{r} \end{aligned}\right\}$$

y dividiendo la segunda entre la primera:

$$v_{máx} = \sqrt{gr\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\,\mathrm{sen}\,\theta}}$$

21. Un vehículo de 1300 kg puede tomar una curva sin peralte de 200 m de radio a una velocidad máxima de 90 km/h. *a*) Calcula el valor del coeficiente de rozamiento. *b*) Calcula la velocidad máxima a la que podría tomar la curva si tuviera un peralte de 10º y el mismo coeficiente de rozamiento.

22. Un tren consta de una máquina de masa $M = 30$ toneladas y de dos vagones de 20 toneladas de masa cada uno. La máquina proporciona una tracción de $F = 300000$ N y el coeficiente de rozamiento vale 0,3. Calcula la aceleración del tren y las tensiones en las uniones de los vagones entre sí y del vagón con la máquina.

    Solución. Las fuerzas se muestran en la figura 43.

    Consideramos que el cable de unión entre la locomotora y el primer vagón no tiene masa. En la figura 43 hemos dibujado la fuerza que realiza el cable sobre la

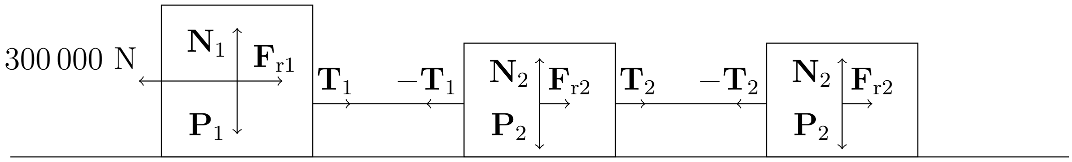

Figura 43:

Figura 44:

locomotora, $\mathbf{T}_1$, sobre el mismo cable (habitualmente se representa así). Su pareja de acción-reacción es la fuerza que realiza la locomotora sobre el cable, $-\mathbf{T}_1$, que representamos en la figura 44

y de manera semejante por el otro extremo para el primer vagón. De esta manera vemos que la fuerza que actúa sobre el cable es cero, que no significa que no experimente aceleración junto a todo el tren sino que al considerar que no tiene masa, no necesita fuerza. Estas fuerzas no las representamos en 43 por simplicidad. Debido a considerar que el cable no tiene masa las tensiones en la locomotora y el primer vagón son iguales y siempre que trabajemos con tensiones usaremos esta aproximación.

Aplicamos la ley fundamental de la dinámica a todo el tren:

$$300\,000 - F_{\mathrm{r1}} - F_{\mathrm{r2}} - F_{\mathrm{r2}} = (m_1 + m_2 + m_2)a$$

porque las tensiones se anulan entre sí (así como los pesos y las normales).

$$300\,000 - 0,3 \cdot 30\,000 \cdot 9,8 - 0,3 \cdot 20\,000 \cdot 9,8 - 0,3 \cdot 20\,000 \cdot 9,8 = 70\,000 \cdot a$$

$$300\,000 - 88200 - 58800 - 58800 = 70\,000 \cdot a$$

$$a = \frac{94200}{70\,000} = 1,34 \text{ m/s}^{-2}$$

Calculamos la tensión para el vagón de cola aplicandole la segunda ley:

$$T_2 - F_{\mathrm{r2}} = m_2 a$$

$$T_2 = 58800 + 20\,000 \cdot 1,34 = 85600 \text{ N}$$

ídem para el primer vagón:

$$T_1 - T_2 - F_{\mathrm{r2}} = m_2 a$$

$$T_1 = 85600 + 58800 + 26800 = 171200 \text{ N}$$

23. Dos masas de 6 y 9 kg penden de los extremos de una cuerda de masa despreciable en una máquina de Atwood. Si inicialmente la masa de 6 kg se encontraba 5 m por debajo de la de 9 kg, determina el tiempo que tardarán en cruzarse a la misma altura una vez que se abandone el sistema a su suerte.

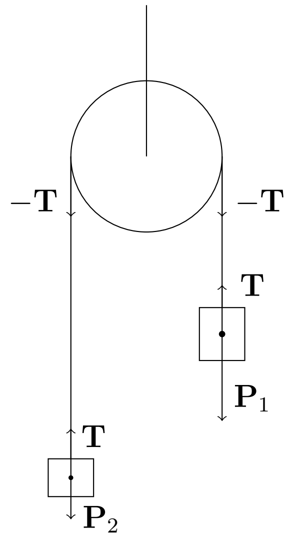

Figura 45:

Solución. El esquema de fuerzas se muestra en la figura 45.

La polea y la cuerda no tienen masa y por eso las tensiones tienen todas el mismo módulo. Así para la polea y la cuerda la resultante de fuerzas vale cero, que significa que no necesitan fuerza para acelerarse puesto que tienen masa cero (no hemos dibujado las fuerzas que tensan la cuerda por simplicidad, que son las parejas de acción-reacción de las fuerzas que reciben los cuerpo y la polea). La polea solo cambia la dirección de la fuerza. Por tanto podemos imaginarnos que un cuerpo tira del otro con una fuerza $\mathbf{T}$ y el otro por acción-reacción tira del primero con $-\mathbf{T}$. Planteamos la segunda ley para ambos cuerpo por separado:

$$\left.\begin{array}{r} P_1 - T = m_1 a \\ T - P_2 = m_2 a \end{array}\right\}$$

sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$P_1 - P_2 = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{3 \cdot 9,8}{15} = 1,96 \text{ m/s}^{-2}$$

Como la aceleración es constante aplicamos la ecuación para un MRUA:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5}{1,96}} = 1,59 \text{ s}$$

teniendo en cuenta que al estar unidos por la cuerda se cruzan al recorrer 2,5 m.

24. Considerando despreciables las masas de la polea y la cuerda, indica cuál es la aceleración que adquieren las masas en el sistema de la figura 46, si: *a*) No hay rozamiento. *b*) El coeficiente de rozamiento cinético vale 0,2.

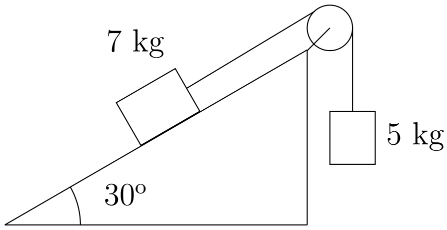

Figura 46:

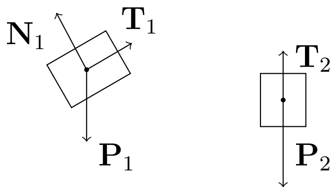

Figura 47:

Solución. *a*) El diagrama de fuerzas se muestra en la figura 47. Sabemos que $T_1 = T_2$ pero como los vectores tienen diferente dirección no podemos nombrarlos igual en el diagrama de fuerzas. Planteamos la segunda ley para el sistema completo suponiendo que el sistema se mueve hacia la derecha:

$$P_2 + T_1 - T_2 - P_1 \operatorname{sen} 30^{\circ} = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{P_2 - P_1 \operatorname{sen} 30^{\circ}}{m_1 + m_2} = \frac{(5 - 3,5) \cdot 9,8}{12} = 1,23 \text{ m/s}^{-2}$$

si nos hubiera salido signo negativo significaría que el sistema se movería hacia la izquierda.

b) Incluimos la fuerza de rozamiento con el plano:

$$P_2 + T_1 - T_2 - P_1 \operatorname{sen} 30^{\circ} - \mu P_1 \cos 30^{\circ} = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{P_2 - P_1 \operatorname{sen} 30^{\circ} - \mu P_1 \cos 30^{\circ}}{m_1 + m_2} = \frac{(5 - 3,5 - 0,2 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 9,8}{12} = 0,024 \text{ m/s}^{-2}$$

25. Determina la aceleración, así como el sentido del movimiento, del sistema de la figura 48 si: *a*) No hay rozamiento. *b*) El coeficiente de rozamiento es 0,3.

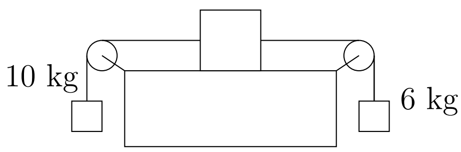

Figura 48:

Solución. *a*) El diagrama de fuerzas se muestra en la figura 49.

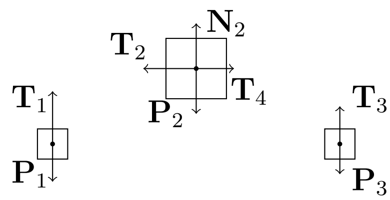

Figura 49:

Sabemos que $T_1 = T_2$ y $T_3 = T_4$ pero como los vectores tienen diferente dirección no podemos nombrarlos igual en el diagrama de fuerzas. Planteamos la segunda ley para el sistema completo suponiendo que el sistema se mueve hacia la izquierda:

$$P_1 + T_2 + T_3 - T_1 - T_4 - P_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$a = \frac{(10-6)\cdot 9,8}{19} = 2,06 \text{ m/s}^{-2}$$

si nos hubiera salido signo negativo significaría que el sistema se movería hacia la derecha.

b) Incluimos el rozamiento con la mesa:

$$P_1 + T_2 + T_3 - T_1 - T_4 - F_\mathrm{r} P_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$a = \frac{(10 - 0,2\cdot 3 - 6)\cdot 9,8}{19} = 0,18 \text{ m/s}^{-2}$$

26. En el sistema de la figura 50, las masas tienen un valor de $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 15$ kg, y μ_c entre el cuerpo m_1 y m_2 es de 0,3. Si el rozamiento con la mesa y las poleas es despreciable —así como las masas de las poleas y la cuerda—, determina la aceleración del sistema y las tensiones de las cuerdas.

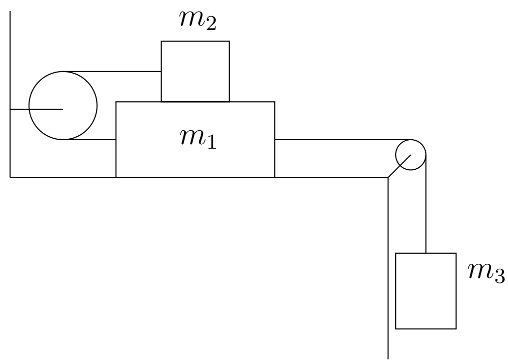

Figura 50:

Solución. El diagrama de fuerzas se muestra en la figura 51.

Sabemos que $T_1 = T_3$ pero como los vectores tienen diferente dirección no podemos nombrarlos igual en el diagrama de fuerzas. Aplicamos la segunda ley de Newton al conjunto:

$$P_3 + T_1 + T_2 - T_3 - T_2 - F_\mathrm{r} - F_\mathrm{r} = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

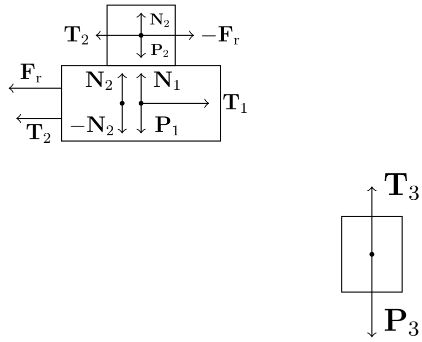

Figura 51:

$$a = \frac{(15 - 0,3 \cdot 3 - 0,3 \cdot 3) \cdot 9,8}{23} = 5,62 \text{ m/s}^{-2}$$

Aplicamos la segunda ley a cada cuerpo para obtener las tensiones:

$$P_3 - T_3 = m_3 a$$

$$T_3 = P_3 - m_3 a = 15(9,8 - 5,62) = 62,7 \text{ N}$$

$$T_2 - F_{\text{r}} = m_2 a$$

$$T_2 = m_2 a + F_{\text{r}} = 3 \cdot 5,62 + 0,3 \cdot 3 \cdot 9,8 = 25,68 \text{ N}$$

27. Describe cómo calcular el coeficiente de rozamiento estático con un plano de inclinación variable.

    Solución. Sabemos que la fuerza de rozamiento cumple que $F_{\text{r}} \leq \mu N$ por lo que toma un valor variable impidiendo el movimiento hasta que una vez superado su valor máximo comienza el movimiento. Situamos un cuerpo en un plano inclinado y aumentamos gradualmente el ángulo. En el instante anterior a que el cuerpo resbale se cumple:

    $$mg \operatorname{sen} \theta = \mu mg \cos \theta$$

    $$\mu = \operatorname{tg} \theta$$

    por lo que midiendo el ángulo anterior al de resbalamiento obtenemos el coeficiente de rozamiento estático.

28. ¿Cuál es la velocidad angular mínima a la que debe girar un caldero lleno de agua que describe una circunferencia vertical para que el agua no se vierta en el punto más alto?

    Solución. En el punto más alto el peso y la tensión están en la misma dirección y sentido y deben proporcionar la fuerza centrípeta:

    $$mg + T = m\omega^2 r$$

    La velocidad mínima ocurrirá cuando la tensión sea cero y la centrípeta la proporcione solo el peso:

    $$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

    si, por ejemplo, el radio de giro mide un metro tendrá que girar a 3,2 rad/s o media vuelta por segundo.

ENERGÍA

1. Sobre un cuerpo de 2 kg de masa, que se mueve inicialmente con una velocidad de 10 m/s, actúa una fuerza constante de 8 N opuesta al desplazamiento, que logra finalmente que el cuerpo se detenga. Calcula el trabajo realizado por dicha fuerza.

   Solución. El esquema se representa en la figura 52, donde el cuerpo se desplaza hacia la derecha.

   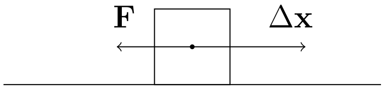

   Figura 52:

   Mediante la segunda ley de Newton averiguamos la aceleración de frenado:

   $$a = \frac{F}{m} = \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}^{-2}$$

   como es constante se trata de un MRUA y calculamos la distancia hasta que se para:

   $$0 - v_0^2 = 2ae$$

   $$e = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-10^2}{-2 \cdot 4} = 12,5 \text{ m}$$

   y aplicamos la definición de trabajo:

   $$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

   $$W = F\Delta r \cos 180^{\text{o}} = 8 \cdot 12,5 \cdot (-1) = -100 \text{ J}$$

2. Suponiendo un átomo de hidrógeno según el modelo de Bohr, en el que el electrón describe órbitas circulares alrededor del protón, ¿qué fuerza es la responsable del movimiento circular del electrón? ¿Qué trabajo realiza dicha fuerza sobre el electrón?

   Solución. La fuerza responsable es la fuerza eléctrica atractiva entre el protón y el electrón, puesto que siempre está dirigida hacia el centro de giro y por tanto proporciona al electrón la fuerza centrípeta necesaria para girar.

   La fuerza y el vector desplazamiento son siempre perpendiculares, como se muestra en la figura 53, por lo que su producto escalar siempre es cero:

   $$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

   $$W = F \cdot \Delta r \cos 90^{\text{o}} = 0$$

   por lo tanto la fuerza centrípeta no realiza trabajo.

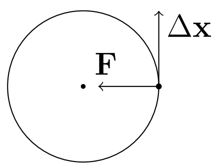

Figura 53:

3. Si se deja caer libremente una bola de petanca de acero de 2 kg desde una altura de 3 m, ¿hay alguna fuerza que realice trabajo? Si es así, calcúlalo.

   Solución. Sobre el cuerpo actúa el peso y sí realiza trabajo puesto que el desplazamiento y la fuerza no son perpendiculares:

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

$$W = F \cdot \Delta r \cos 0^{o} = 2 \cdot 9,8 \cdot 3 \cdot 1 = 58,8 \text{ J}$$

   y vemos que el trabajo es positivo puesto que la fuerza y el desplazamiento tienen el mismo sentido.

4. ¿Qué trabajo realizas cuando sostienes un cuerpo de 10 kg?

   Solución. Ninguno puesto que no hay desplazamiento. La confusión surge puesto que la palabra trabajo la usamos en el lenguaje cotidiano pero en física tiene un significado muy preciso:

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

   En el lenguaje cotidiano decimos que realizamos un trabajo porque lo asociamos a que nos cansamos, para evitar confusión mejor referirnos a ese cansancio como esfuerzo y dejar trabajo solo para el significado físico. Si analizamos nuestro cuerpo sí se estaría realizando un trabajo interno puesto que habría fuerzas y desplazamiento de la sangre. De igual manera cualquier cable que soporte un peso no está realizando ningún trabajo (ni se cansa, claro).

5. ¿Qué trabajo realiza un telesquí cuando te remonta con velocidad constante a lo largo de 2 km de una pista de un 20 % de pendiente, si suponemos que no hay rozamiento? (considera $m = 60$ kg).

   Solución. El 20 % de pendiente significa que asciende 20 m por cada 100 m recorridos en la proyección horizontal (figura 54).

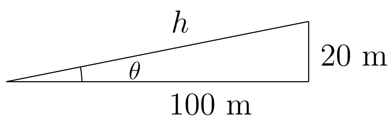

Figura 54:

   Obtenemos el ángulo:

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{20}{100} = 11,31^{o}$$

   Las fuerzas que actúan se muestran en la figura 55. Como sube a velocidad cons-

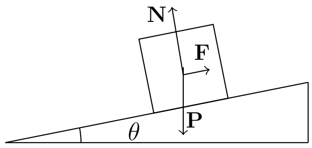

Figura 55:

tante la resultante de todas las fuerzas es cero (1ª ley de Newton) por lo que se cumple:

$$\left.\begin{aligned} P\cos\theta = N \\ P\,\mathrm{sen}\,\theta = F \end{aligned}\right\}$$

y el trabajo total que recibe la persona es cero. Pero nos preguntan por el trabajo que realiza el telesquí, así que tenemos que calcular el trabajo que realiza la fuerza F:

$$W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$$
$$W = F\cdot\Delta r\cos 0^{\text{o}}$$
$$W = P\,\mathrm{sen}\,11,31^{\text{o}}\cdot 2000\cdot 1$$
$$W = 60\cdot 9,8\cdot 0,2\cdot 2000 = 2,31\cdot 10^3\ \text{J}$$

6. Un cuerpo de 3 kg se desliza por un plano inclinado 45º con respecto a la horizontal desde una altura de 5 m. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es de 0,32. Determina: *a*) El trabajo realizado sobre el cuerpo por cada una de las fuerzas actúan hasta que llega al final del plano. *b*) El trabajo total realizado sobre el cuerpo en todo el trayecto.

   Solución. *a*) El cuerpo recorre:

$$h = \frac{5}{\mathrm{sen}\,45^{\text{o}}} = 7,1\ \text{m}$$

   y sobre él actúa el peso, la normal y la fuerza de rozamiento (figura 56). La normal no hace trabajo porque es perpendicular al desplazamiento, la fuerza de rozamiento hará un trabajo negativo y el peso uno positivo. Se cumple que:

$$\left.\begin{aligned} P\cos\theta = N \\ P\,\mathrm{sen}\,\theta - F_r = ma \end{aligned}\right\}$$

   por lo que:

$$F_r = \mu N = \mu P\cos\theta$$

   y su trabajo es negativo porque la fuerza de rozamiento tiene la misma dirección pero sentido contrario al desplazamiento:

$$W = -F_r\Delta r = -\mu P\cos 45^{\text{o}}\cdot 7,1 = -0,32\cdot 3\cdot 9,8\cos 45^{\text{o}}\cdot 7,1 = -47,23\ \text{J}$$

   Para el peso tenemos en cuenta que solo la componente tangencial produce trabajo:

$$W = P\,\mathrm{sen}\,\theta\Delta r = P\,\mathrm{sen}\,45^{\text{o}}\cdot 7,1 = 3\cdot 9,8\,\mathrm{sen}\,45^{\text{o}}\cdot 7,1 = 147,60\ \text{J}$$

   b) El trabajo total es $W = 147,60 - 47,23 = 100,37$ J.

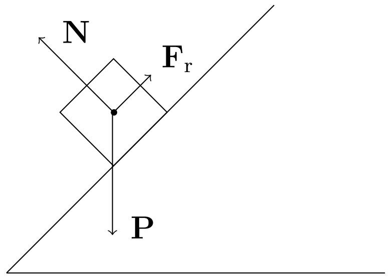

Figura 56:

7. Cierto automóvil que circula a 120 km/h está sometido a una fuerza de fricción con la carretera de 211 N y a una fricción con el aire de 830 N. ¿Qué potencia debe desarrollar en esas condiciones para mantener constante esa velocidad? Expresa el resultado en kilovatios.

   Solución. La potencia es el trabajo por unidad de tiempo y teniendo en cuenta las definiciones de trabajo y velocidad podemos escribir:

   $$P = \frac{W}{t} = \frac{F\Delta r}{t} = Fv$$

   El rozamiento total vale 211+830 = 1041 N y el motor debe generar una fuerza igual pero de sentido contrario para contrarrestarla y que así se mantenga la velocidad constante conforme a la 1ª ley de Newton. Por lo que la potencia que genera el motor es:

   $$P = Fv = 1041 \cdot 33,33 = 34,70 \text{ kW}$$

   (un coche suele tener 70 kW de potencia máxima).

8. Se deja caer un objeto de 2 kg desde 100 m de altura. Calcula: *a*) Su energía potencial inicial. *b*) Su energía potencial cuando se encuentre a 50 m del suelo. *c*) Su velocidad y su energía cinética a 50 m de altura. *d*) La suma de ambas energías a esa altura.

   Solución. Como solo actúa la fuerza de la gravedad se conserva la energía mecánica, puesto que es una fuerza conservativa.

   a) La energía potencial inicial es:

   $$E_{\mathrm{p}} = mgh = 2 \cdot 9,8 \cdot 100 = 1960 \text{ J}$$

   y esa es también la energía mecánica puesto que inicialmente su energía cinética es cero.

   b)

   $$E_{\mathrm{p}} = mgh = 2 \cdot 9,8 \cdot 50 = 980 \text{ J}$$

   c)

   $$E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}$$

   $$E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{p}} = 1960 - 980 = 980 \text{ J}$$

   $$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{c}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 980}{2}} = 31,30 \text{ m/s}$$

   d) A cualquier altura su suma es la energía mecánica por lo que vale 1960 J.

9. Sobre un muelle vertical de constante $k = 200$ N/m se coloca una masa de 500 g. Posteriormente se cambia la masa por otra de 2 kg. Determina la energía potencial elástica que se almacena en el muelle en cada caso.

   Solución. Al colgar una masa el muelle se alarga una cantidad x hasta que la fuerza elástica equilibra al peso:

$$kx = mg$$
$$x = \frac{mg}{k}$$

   y en ese momento se encuentra almacenada una energía potencial elástica:

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{(mg)^2}{k^2} = \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k}$$

   que en cada caso vale:

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\frac{(0,5 \cdot 9,8)^2}{200} = 0,06 \text{ J}$$
$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\frac{(2 \cdot 9,8)^2}{200} = 0,96 \text{ J}$$

10. Un cuerpo de medio kilogramo de masa se deja caer desde una altura de 1 m sobre un pequeño resorte vertical sujeto al suelo y cuya constante elástica es $k = 2000$ N/m. Calcula la deformación máxima del resorte.

    Solución. Solo actúan fuerzas conservativas (gravitatoria y elástica) por lo que la energía mecánica se conserva. Conforme descienda el cuerpo su energía potencial se transformará en energía cinética, que será máxima justo antes de chocar con el muelle y posteriormente la cinética se transformará en energía potencial elástica hasta llegar a la máxima compresión. Elegimos el cero de enería potencial en el punto de máxima compresión x del muelle por lo que se cumple:

$$E_{\mathrm{p\ grav.}} = E_{\mathrm{p\ elást.}}$$
$$mg(1+x) = \frac{1}{2}kx^2$$
$$\frac{1}{2}g(1+x) = \frac{1}{2}kx^2$$
$$g + gx = kx^2$$
$$kx^2 - gx - g = 0$$
$$x = \frac{g \pm \sqrt{g^2 + 4kg}}{2k} = \frac{9,8 \pm \sqrt{9,8^2 + 4 \cdot 2000 \cdot 9,8}}{2 \cdot 2000} = \frac{9,8 \pm 280,17}{4000} = 0,072 \text{ m}$$

    por lo que el muelle se comprime 0,072 metros (la solución negativa no tiene sentido físico).

11. Un péndulo cuyo hilo mide 2 m, que sujeta una bola de masa m, es desplazado 60º con respecto a la vertical. Si en esa posición se suelta: *a*) ¿Cuál será su velocidad al pasar por el punto más bajo? *b*) ¿Qué energía cinética tendrá cuando el hilo forme 15º con la vertical?

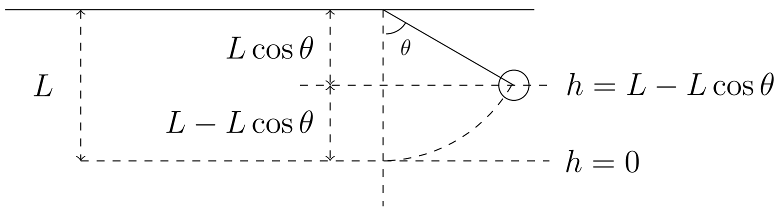

Figura 57:

Solución. Sobre el cuerpo solo actúa la fuerza gravitatoria y la tensión de la cuerda. La primera es conservativa y la segunda no realiza trabajo al ser centrípeta por lo que podemos afirmar que se conserva la energía mecánica. En la figura 57 se muestra la altura que desciende el cuerpo en el primer apartado.

a) La energía potencial inicial se transformará en energía cinética en el punto más bajo:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

la masa se simplifica:

$$gh = \frac{1}{2}v^2$$

$$g(L - L\cos\theta) = \frac{1}{2}v^2$$

$$v = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 2(1 - \cos 60^{\text{o}})} = \sqrt{2 \cdot 9,8} = 4,43 \text{ m/s}$$

12. ¿Qué son las fuerzas conservativas? ¿Y las disipativas?

    Solución. Las fuerzas conservativas son aquellas bajo cuya acción se conserva la energía mecánica. Las disipativas o no conservativas son aquellas bajo cuya acción no se conserva la energía mecánica. Ejemplos de las primeras tenemos el peso y las fuerzas elástica que cumplen la ley de Hooke y de las segundas el rozamiento.

13. Si la fuerza de la gravedad es conservativa, ¿por qué nos resulta más fácil subir hasta la cima de una montaña por un camino sinuoso que hacerlo en línea recta?

    Solución. La energía y el trabajo van ser iguales en ambos casos:

    $$W = \Delta E_{\text{p}}$$

    pero el trabajo nos costará menos esfuerzo si usamos un camino largo porque de esa manera disminuyemos la fuerza a aplicar:

    $$W = F\Delta r$$

    Las máquinas simples se basan en este principio, como el plano inclinado, el tornillo, etc.

14. Un plano inclinado tiene 15 m de largo y su base, 10 m. Un cuerpo de 800 g de masa resbala desde arriba con una velocidad inicial de 1,5 m/s. ¿Qué valor tiene su energía cinética y su velocidad al final del plano?

    Solución. El cuerpo parte de una altura de $\sqrt{15^2 - 10^2} = 11,18$ m. Sobre él actúa el peso y la normal. La primera es conservativa y la segunda no realiza trabajo por lo que la energía mecánica se conserva. Planteamos el balance de energía considerando el cero de energía potencial en la base del plano:

$$E_{\mathrm{c0}} + E_{\mathrm{p0}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}}$$

$$\frac{1}{2}m1,5^2 + mg \cdot 11,18 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

    Dividimos entre la masa y multiplicamos por 2:

$$1,5^2 + 2g \cdot 11,18 = v^2$$

$$v = 14,87 \text{ m/s}$$

    y la energía cinética es:

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 14,87^2 = 88,55 \text{ J}$$

15. Un cuerpo comienza a ascender por un plano inclinado 30º con una velocidad inicial de 4 m/s. Si el coeficiente de rozamiento con el plano es de 0,2, calcula hasta qué altura asciende.

    Solución. Como hay fuerza de rozamiento no se conserva la energía mecánica por lo que aplicamos el teorema trabajo-energía generalizado:

$$W_{\mathrm{nc}} = \Delta E_{\mathrm{m}}$$

    Calculemos primero el trabajo no conservativo (L es la distancia que recorre por el plano):

$$W_{\mathrm{nc}} = \mu N L \cos 180^{\circ} = -\mu mg \cos 30^{\circ} L$$

    pero escribámoslo en función de la altura h (por trigonometría sabemos que $h = L \operatorname{sen} 30^{\circ}$):

$$W_{\mathrm{nc}} = -\frac{\mu mgh}{\operatorname{tg} 30^{\circ}}$$

    Ahora calculemos la variación de la energía mecánica considerando el cero de energía potencial en el suelo:

$$\Delta E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{m}} - E_{\mathrm{m0}}$$

$$\Delta E_{\mathrm{m}} = 0 + mgh - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + 0\right)$$

$$\Delta E_{\mathrm{m}} = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2$$

y unamos ambos términos:

$$-\frac{\mu mgh}{\operatorname{tg} 30^{\text{o}}} = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Dividimos entre la masa y sustituimos por los valores:

$$-\frac{0,2 \cdot 9,8h}{\operatorname{tg} 30^{\text{o}}} = 9,8h - \frac{1}{2}4^2$$

$$9,8h + 3,39h = 8$$

$$h = 0,6 \text{ m}$$

por lo que asciende 60 cm.

16. Si un coche se mueve con velocidad v por una carretera horizontal, y el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo es μ, deduce, a partir de consideraciones energéticas, una expresión para la distancia mínima a la que el vehículo puede detenerse.

    Solución. Aplicamos el teorema trabajo-energía generalizado (d es la distancia de frenado):

$$W_{\text{nc}} = \Delta E_{\text{m}}$$

$$-\mu mgd = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$d = \frac{v^2}{2\mu g}$$

    como vemos, la distancia de frenado depende de la velocidad al cuadrado por lo que si vamos al doble de velocidad la distancia de frenado no es el doble sino cuatro veces mayor, por eso se tiende a reducir la velocidad para disminuir los accidentes pero los conductores no perciben el peligro al ir en coches en los que no se notan las imperfecciones de la carretera y parece que no van tan rápido. De la misma manera, si tenemos un accidente la energía cinética depende de la velocidad al cuadrado por lo que duplicar la velocidad cuadriplica la energía que llevamos y cuadriplica los daños que se producirían en un accidente.

17. El sistema de la figura 58 es liberado desde el reposo. Halla una expresión para la velocidad de los objetos cuando m' ha descendido una altura h. Resuelve el problema por procedimientos energéticos y dinámicos.

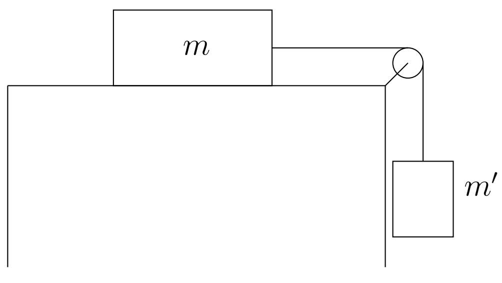

Figura 58:

Solución. No hay fuerzas no conservativas por lo que se conserva la energía. Para plantear el balance de energía consideramos que el cuerpo m' parte de una altura h y llega a $h = 0$ y la energía potencial del cuerpo m no varía porque está siempre a la misma altura por lo que no lo incluimos en el balance:

$$E_{\mathrm{m0}} = E_{\mathrm{m}}$$
$$m'gh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v^2$$
$$m'gh = \frac{1}{2}\left(m + m'\right)v^2$$
$$v = \sqrt{\frac{2m'gh}{m + m'}}$$

Para resolverlo mediante dinámica planteamos la segunda ley a los dos cuerpos:

$$m'g = (m + m')a$$

y obtenemos la aceleración del sistema:

$$a = \frac{m'g}{m + m'}$$

y por cinemática obtenemos la velocidad:

$$v^2 - 0 = 2ah$$
$$v = \sqrt{\frac{2m'gh}{m + m'}}$$

Aunque en este caso por dinámica sale bastante fácil y corto siempre es muchísimo más fácil resolverlos mediante energía.

18. Repite el ejercicio anterior si existe rozamiento con la mesa.

Solución. Al haber rozamiento aplicamos el teorema trabajo-energía generalizado:

$$W_{\mathrm{nc}} = \Delta E_{\mathrm{m}}$$
$$-\mu mgh = \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v^2\right) - m'gh$$
$$-\mu mgh = \frac{1}{2}(m + m')v^2 - m'gh$$
$$v = \sqrt{\frac{2(m'gh - \mu mgh)}{m + m'}}$$

y mediante dinámica:

$$m'g - \mu mg = (m + m')a$$
$$a = \frac{m'g - \mu mg}{m + m'}$$
$$v^2 - 0 = 2ah$$
$$v = \sqrt{\frac{2m'gh}{m + m'}}$$

19. Un bloque de 3 kg situado a 4 m de altura se deja resbalar por una rampa curva y lisa sin rozamiento como se aprecia en la figura 59. Cuando llega al suelo, recorre 10 m sobre una superficie horizontal rugosa hasta que se para. Calcula: *a*) La velocidad con que llega el bloque a la superficie horizontal. *b)* El trabajo que realiza la fuerza de rozamiento. *c)* El coeficiente de rozamiento con la superficie horizontal.

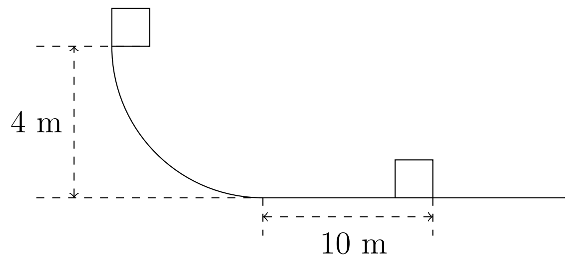

Figura 59:

Solución. *a*) La energía potencial se transforma en energía cinética:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 4} = 8,85 \text{ m/s}$$

b) El rozamiento disipa toda la energía mecánica:

$$W_{\text{nc}} = \Delta E_{\text{m}}$$

$$W_{\text{nc}} = 0 - \frac{1}{2}m \cdot 8,85^2 = -117,48 \text{ J}$$

c)

$$W_{\text{nc}} = \Delta E_{\text{m}}$$

$$-\mu mg \cdot 10 = 0 - \frac{1}{2}m \cdot 8,85^2$$

$$\mu = \frac{8,85^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 10} = 0,4$$

20. En un ascensor que sube a velocidad constante comprueba que se cumple el teorema trabajo-energía y el teorema trabajo-energía generalizado.

Solución. El teorema trabajo-energía nos dice que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía cinética:

$$W_{\text{total}} = \Delta E_{\text{c}}$$

Como sube a velocidad contante el peso y la tensión se equilibran por lo que la resultante de fuerzas es cero por lo que el trabajo total vale cero:

$$W_{\text{total}} = 0$$

y al subir a velocidad constante la energía cinética no varía por lo que:

$$\Delta E_{\mathrm{c}} = 0$$

y por tanto se cumple el teorema trabajo-energía.

El teorema trabajo-energía generalizado nos dice que el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas que actúan sobre un cuerpo es igual a la variación de su energía mecánica:

$$W_{\mathrm{nc}} = \Delta E_{\mathrm{m}}$$

La tensión es una fuerza no conservativa (pensad que la ejerce en última instancia el motor y este consume electricidad que ya no podremos recuperar) y como sube a velocidad constante está equilibrada con el peso:

$$W_{\mathrm{nc}} = T\Delta r \cos 0^{\mathrm{o}} = mgh$$

Como sube a velocidad constante la variación de la energía mecánica es:

$$\Delta E_{\mathrm{m}} = mgh - 0$$

por lo que se cumple el teorema trabajo-energía generalizado.